Arbres, excursions et processus de Lévy complètement asymétriques

Amaury Lambert

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Amaury LAMBERT

le 12 janvier 2001

Titre :

ARBRES, EXCURSIONS, ET PROCESSUS DE LÉVY COMPLÈTEMENT ASYMÉTRIQUES

Jury :

Jean BERTOIN	*directeur de thèse*
Yves LE JAN	*rapporteur*
Jacques AZÉMA	*examinateurs*
Francis HIRSCH	*examinateurs*
Jean-François LE GALL	*examinateurs*

‘Prenez intérêt, je vous en conjure, à ces demeures sacrées que l’on désigne du nom expressif de laboratoires. Demandez qu’on les multiplie et qu’on les orne [...]. C’est là que l’humanité grandit, se fortifie, et devient meilleure. Elle y apprend à lire dans les œuvres de la nature, œuvres de progrès et d’harmonie universelle, tandis que ses œuvres à elle sont trop souvent celles de la barbarie, du fanatisme et de la destruction’.

Louis Pasteur

Avant-propos

Profitons d'une de ces trop rares occasions où l'on peut dire son respect à ceux qui nous guident, sa reconnaissance à ceux qui nous soutiennent, son affection à ceux qui nous accompagnent.

J'ai eu la chance de rencontrer une personne qui mérite les trois, quelqu'un qui sait prodiguer ses conseils, son temps, son savoir avec une simplicité exemplaire, qui sait réconforter, réprimander ou plaisanter avec un ton également juste, et qui peut même, quand la vie l'exige, recommander de laisser un peu l'étude de côté. Pas la peine de citer son nom -tout le monde l'aura reconnu- mais j'aimerais croire que j'ai été à la hauteur de ses exigences.

Quatre professeurs ont aujourd'hui sacrifié à cette jolie tradition par laquelle les plus grands se penchent sur les berceaux des novices. En premier lieu, Yves Le Jan qui a pris le temps de rapporter la thèse, et puis Jacques Azéma, Francis Hirsch et Jean-François Le Gall : leur présence à tous les quatre est un grand honneur.

Quand on sait à quel point il est difficile de les enseigner, il devient évident que donner le goût des mathématiques tient du miracle, aussi dois-je admiration et allégeance à quelques maîtres que je n'oublie pas, M. Randouin d'un collège de la Bastille, Mme Depouly d'un lycée du Quartier Latin, et M. Élie également, Philippe Bougerol à Palaiseau (il ignore que je lui dois le goût des probas), et à Jussieu, Jean Bertoin et Marc Yor.

Il y a ceux grâce à qui, et puis ceux avec qui, on fait des maths. C'est un plaisir de citer les noms des très valeureux soldats de l'ombre que sont les thésards, Hadda F. et Caroline C.W., je pense à vous. Mais aussi les Wissem J., les Marc F., les Paul S., et même allez les Nicolas F., et toute la ribambelle d'amoureux des maths de 3D1 et 4D1 (et anciennement Jussieu) plus ou moins transis, plus ou moins confiants.

Parmi les autres membres du laboratoire, j'ai envie de remercier (le chaleureux) L. Chaumont, (le très amène) N. Enriquez, M. Yor (l'idéaliste -déçu ?), (les spirituels) O. Adelman et J.P. Thouvenot.

Je n'oublie ni Nelly (qui a souvent, paraît-il, l'impression d'exercer le dur métier d'infirmière-chef d'H.P.), ni Geneviève, ni Josette, et encore moins Luxéa. Enfin, notre bibliothécaire Philippe : il a le coup de griffe prompt et imprévisible, mais on l'aime énormément.

Avant de quitter le (tout) petit monde des mathématiques, je tire un bref coup de chapeau à Gilbert Ikorong, authentique, droit, et malheureusement encore méconnu.

Et bien sûr il y a les autres, ceux grâce à qui je n'ai pas passé ma vie sur cette thèse. Il me tient à cœur, avant toute chose, de leur livrer cet

Avertissement au profane : toi commun des lecteurs, qu'un maître d'école irascible ou une paresse impénitente ont détourné des mathématiques, à qui ce seul dernier mot inspire une logorrhée complaisante sur ta propre nullité -combien de fois avons-nous fait, chers collègues, la pénible expérience de ces aveux ?- toi qui, j'en suis marri, subis en ce moment cette soutenance l'œil vide et la bouche bée, et qui refermeras ces pages avant d'en avoir parcouru la deuxième, toi mon ami, mon frère, qui dans ton ignorance ou ton indifférence nous tiens pour des ermites ou pour des fous, réponds-moi en ton âme et conscience.
Mais d'abord imagine. Imagine qu'il y a plus d'un siècle, une ambition ancestrale a vu le jour, celle de bâtir une langue universelle, comprise et parlée par des milliers d'êtres de toutes les couleurs et de toutes les nations. Imagine encore. Imagine que c'est dans cette langue, et dans cette langue seulement, que la nature nous a confié ses secrets, nous a révélé ses lois, et nous les révèle encore. Imagine enfin que dans une telle langue, il soit impossible de dire simplement autre chose que la seule vérité. Peux-tu maintenant croire que cette langue puisse être entendue de tous sans effort ni persévérance, et que ceux qui la parlent ne soient pas des esthètes, avides d'élire parmi les vérités qui s'y expriment, les plus profondes, les plus fines, les plus belles ?

Reprenons. Les profanes valent tout de même bien un merci.

Je pense d'abord à un ange avec qui j'ai passé trois années merveilleuses, dont la moitié de ce doctorat.

Ensuite à la famille Lambert, mon Adrien adoré, mon Aurore adorée, mes parents adorés ; à ma fabuleuse grand-mère, chez qui j'ai fait des pages de 5 pour apprendre à ne plus les former comme des S !

Et puis les copains du quartier (Matthieu, Stéphane, Sandrine, John, Karim, Jean, Yomgui, Sonia), le trio des kiffeurs Sarah/Guillaume/Didier (give thanks and praises), Kesimir and Co (Manu, Irit, Gaël, Raphaël, Bertrand, Sol, Alexis, J.M., Monika, P.A., Sara, J.D., Tiffany, Greg,...), la Brasserie de la Gare (Annie, Youssef, Florent, Sami, Roschdy, Léo, Patrick, David, Vlad, et surtout dédicace spéciale à Fabien, qui a insisté pour que je lui explique chaque chapitre de ma thèse), les trois magnifiques cousines (Noémie, Anne-Sophie, Stéphane), la bande de Massetot (Cidric, Cyril, Mehdi,...), l'inoubliable Club Five (Alexandra, Priscille, Florence, Toinette, Aurélie), le football féminin (Axelle et Estelle), les TEH (Molia et Abraham aux platines).

Merci enfin à ceux et à celles qui sont là en général et aujourd'hui en particulier. Dans le désordre le plus méticuleusement calculé : Léonie S., Stéphanette D., Pauline D., Aurélie S., Julien D., Hélène Z., Khaoula M., Stéphanie F., Caroline R. (Kρ), Béatrice S., Charlotte S., Hervé R., Arnaud D., Marjolaine P., Agustina B., Marie D., Julie C.C., Clara G., Sylvie C., Marguerite Z.

Table des matières

Introduction

Quatre chapitres constituent la présente thèse. Dans le premier chapitre, nous étudions le conditionnement d'un processus de Lévy complètement asymétrique à demeurer dans un intervalle fini. Les deux suivants sont consacrés aux processus de branchement à espace d'états continu, qui sont des processus de Lévy sans saut négatif changés de temps : généalogie (deuxième chapitre), dont nous dérivons des théorèmes de type Ray-Knight, et conditionnement à ne jamais s'éteindre (troisième chapitre). Enfin, le dernier chapitre traite de théorie du renouvellement multivariée dans deux cas naturels d'ensembles aléatoires emboîtés.

Chaque chapitre est conçu comme un article comportant sa propre bibliographie. Ils sont tous écrits en langue anglaise sauf le premier, dont une version traduite et légèrement expurgée est parue [12]. Le deuxième chapitre vient d'être accepté pour publication [13]. Le dernier chapitre est actuellement soumis.

Nous considérons que le lecteur est familier avec les processus de Lévy, les processus de branchement et la théorie des excursions. Toutefois, pour un bref survol de cette introduction, nous rappelons quelques définitions indispensables.

Un processus de Lévy est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires càdlàg. On dit qu'il est complètement asymétrique lorsqu'il est réel et que ses sauts sont tous de même signe. Si par exemple ils sont tous positifs, on parlera de processus de Lévy spectralement positif. L'équivalent discret de tels processus sont les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ dites continues à gauche (leurs seuls pas strictement négatifs sont de longueur -1).

Les processus de branchement à espace d'états continu (CB) sont des processus de Feller à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ caractérisés par leur mécanisme de branchement ψ, où ψ est l'exposant de Laplace d'un Lévy spectralement positif. Ils possèdent la propriété d'additivité suivante : la somme de deux CB(ψ) indépendants issus de x et y respectivement, est un CB(ψ) issu de $x + y$. L'équivalent discret de ces processus sont les processus de Galton-Watson.

Un processus de branchement avec immigration (CBI) est caractérisé par son mécanisme de branchement ψ et par son mécanisme d'immigration ϕ, où ϕ est l'exposant de Laplace d'un subordinateur (processus de Lévy croissant).

0.1 Chapitre 1 : le processus de Lévy confiné

Les processus de Lévy complètement asymétriques sont couramment utilisés en probabilités appliquées [18] pour modéliser des files d'attente, le niveau d'un barrage, les encours d'une compagnie d'assurances, etc. On s'intéresse donc naturellement à leur comportement avant la sortie d'un intervalle donné (par exemple surcharge ou fin de la file d'attente, débordement ou assèchement du barrage). Notre but est plus précisément de conditionner un processus de Lévy X complètement asymétrique à demeurer indéfiniment dans l'intervalle $(0, a)$. On désigne par T le premier temps de sortie de $(0, a)$. Comme l'événement $\{T = \infty\}$ est évanescent, le conditionnement ne se fait pas au sens usuel mais par transformation harmonique. Chaumont [8] a ainsi montré l'existence d'un processus de Lévy conditionné à demeurer dans $(0, \infty)$, et Knight [11] a fait de même pour le mouvement brownien dans $(0, a)$. Nous généralisons ce dernier résultat aux processus de Lévy complètement asymétriques (sans perdre de généralité, nous supposons que X est spectralement négatif) en utilisant la fonction continue positive croissante W, appelée fonction d'échelle. Plus précisément, si ψ désigne l'exposant de Laplace de X, alors W a pour transformée de Laplace $\lambda \mapsto 1/\psi(\lambda)$. On définit également les fonctions $W^{(q)}$ ($q \in \mathbb{R}$) de transformées de Laplace $\lambda \mapsto 1/(\psi(\lambda) - q)$, et

$$\rho(a) = \inf\{q \geq 0 : W^{(-q)}(a) = 0\}.$$

La fonction d'échelle sert notamment à résoudre le problème de la double sortie (cf. [19] et les références du chapitre 1), et ρ est le taux de décroissance géométrique des probabilités $\mathbb{P}(T > t)$ lorsque $t \to \infty$ (voir [2]).

Théorème 0.1 *Soit $x \in (0, a)$.*

(i) Les lois conditionnelles $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T > t)$ admettent une limite notée $\mathbb{P}_x^{\updownarrow}$ quand $t \to \infty$, au sens où pour tous $s \geq 0$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_s$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(\Lambda \mid T > t) = \mathbb{P}_x^{\updownarrow}(\Lambda).$$

(ii) La mesure de probabilité $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ est également obtenue comme h-transformée par la martingale D

$$D_t = e^{\rho t}\mathbf{1}_{\{t<T\}} W^{(-\rho)}(X_t),$$

c'est-à-dire

$$d\mathbb{P}^{\updownarrow}_{x|\mathcal{F}_t} = \frac{D_t}{D_0} \, . \, d\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

(iii) Sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, X est récurrent-positif avec probabilité stationnaire

$$\mu(dx) = \frac{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(a-x)}{c(a)}dx = p(x)dx,$$

où $c(a)$ est la constante de normalisation. De plus, p est une fonction unimodale symétrique par rapport à $a/2$.

Nous faisons ensuite une étude approfondie du processus de loi $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ dit confiné dans $(0,a)$: transformées de Laplace des premiers temps de passage, noyau de Lévy, mesure d'excursion hors d'un point, convergence des lois $\mathbb{P}_x^{\updownarrow}$ quand $x \to 0+$. Notamment, nous mettons en évidence une relation d'absolue continuité entre $n_x^{\updownarrow}$ la mesure d'excursion hors de x associée à $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, et la mesure d'excursion associée à $\mathbb{P}$, une désintégration de $n_x^{\updownarrow}$ par rapport à son unique instant de saut à travers x, ainsi que la 'loi' du maximum sous $n_x^{\updownarrow}$.

Nous utilisons ensuite ces résultats pour connaître le comportement asymptotique du suprémum $S_t = \sup_{s\leq t} X_s$, quand $t \to \infty$. Nous montrons d'abord, grâce au théorème des fonctions implicites, que le taux de décroissance ρ comme fonction de la largeur a de l'intervalle, est une fonction strictement décroissante de classe C^1 sur $(0,\infty)$. Sa dérivée est donc non nulle sur un ouvert dense $\mathcal{D}$ de $(0,\infty)$, et de plus $\mathcal{D}$ coïncide avec $(0,\infty)$ tout entier lorsque X est un processus stable d'indice $\alpha \in (1,2]$.

Théorème 0.2 *On a les trois résultats de convergence suivants :*

(i) Si $a \in \mathcal{D}$, alors $t(a - S_t)$ converge en loi quand $t \to \infty$ vers une v.a. exponentielle de paramètre $|\rho'(a)|$.

(ii) Soit f une fonction positive décroissante. Alors

$$\int^{\infty} f(s)ds \text{ converge } \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{a - S_t}{f(t)} = +\infty \quad p.s.$$

Si de plus $a \in \mathcal{D}$, alors

$$\int^{\infty} f(s)ds \text{ diverge } \Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{a - S_t}{f(t)} = 0 \quad p.s.$$

(iii) Si $a \in \mathcal{D}$, alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t(a - S_t)}{\ln(\ln(t))} = \frac{1}{|\rho'(a)|} \quad p.s.$$

Dans le cas stable, $\rho(a) = r(\alpha)a^{-\alpha}$, où $r(\alpha)$ est une constante positive ne dépendant que de α. En particulier, dans le cas du mouvement brownien confiné (le brownien tabou de Knight),

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t(a - S_t)}{\ln(\ln(t))} = \frac{a^3}{\pi^2} \quad \text{p.s.}$$

0.2 Chapitre 2 : la généalogie des processus de branchement avec immigration

Dans le but d'étendre la construction des super-mouvements browniens aux superprocessus à mécanismes de branchement quelconques (le lecteur intéressé pourra se référer à [14]), Le Gall et Le Jan [15] ont mis en évidence la généalogie des processus de branchement à espace d'états continu. Cette généalogie est décrite par un processus non-markovien appelé le processus de hauteur. Son équivalent dans le cas discret est le processus des profondeurs successives dans un arbre de Galton-Watson fini parcouru dans l'ordre lexicographique. Au vu du chapitre suivant, une question naturelle se pose sur ce que devient la généalogie après conditionnement par la non-extinction (par exemple, existe-t-il une unique branche infinie ?). Plus généralement, nous définissons ici la généalogie des processus de branchement avec immigration, dans la même veine que [15], dont nous dérivons une extension du théorème de Ray-Knight-Williams. De plus, le lien est également fait avec le type de généalogie défini dans [4].

Plaçons-nous d'abord dans le cas discret. Pour conserver une structure d'arbre dans une population où en plus de brancher les particules migrent, un moyen simple [16] est de donner à toutes les particules immigrantes d'une même génération, une même particule mère virtuelle additionnelle. A chaque génération, les particules sont ordonnées de la gauche vers la droite (on dit aussi de la plus ancienne à la plus jeune), sont disposées ensuite les particules immigrantes, puis à l'extrémité droite la particule virtuelle. Notre but est de construire l'équivalent à temps continu du processus de hauteur qui à l'entier n associe la hauteur dans l'arbre $H_n^\star$ du n-ième individu (dans l'ordre lexicographique). Pour ce faire, on code la structure généalogique par un processus markovien $W^\star$ appelé GCP (processus de codage généalogique). Il associe au n-ième individu la quantité $W_n^\star$ obtenue en sommant le nombre de frères plus jeunes de chacun de ses ancêtres.

On désigne par ν le mécanisme de branchement et par μ le mécanisme d'immigration. On montre alors facilement que le processus $W^\star$ est la concaténation d'une suite d'excursions i.i.d. Chacune de ces excursions est distribuée comme la marche aléatoire continue à gauche dont les pas suivent $\tilde{\nu}(k) = \nu(k+1), k = -1, 0, 1, \ldots$, qui est tuée en atteignant 0, et débute par une v.a. de loi μ. A partir du GCP, on peut récupérer le processus de hauteur par une fonctionnelle de comptage

$$H_n^\star = \mathrm{card}\{j : 0 \leq j < n, W_j^\star = \inf_{j \leq l \leq n} W_l^\star\}, \qquad n \geq 0. \tag{1}$$

Le processus de Galton-Watson avec immigration est le processus qui associe à l'entier p le nombre d'individus appartenant à la p-ième génération. C'est une fonctionnelle de $H^\star$ de type temps local

$$Z_p^\star = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{H_n^\star = p}, \qquad p \geq 0. \tag{2}$$

Passons maintenant au temps continu. Afin de mettre en évidence un processus de hauteur, nous construisons de deux manières différentes un processus $X^\star$ de codage généalogique, qui est l'analogue continu de $W^\star$, auquel nous appliquons une fonctionnelle de type (1). Nous vérifions ensuite que le processus des temps locaux (cf. (2)) de $H^\star$ ainsi défini est un CBI.

Soient X un processus de Lévy spectralement positif ne dérivant pas vers $+\infty$ d'exposant de Laplace ψ, et Y un subordinateur indépendant d'exposant de Laplace ϕ. Grâce au théorème de synthèse d'Itô, nous montrons l'existence et l'unicité d'une probabilité $\mathbb{P}^\star$ dont la mesure d'excursion associée $N^\star$ est la somme de deux mesures à supports disjoints décrites comme suit (ϵ désigne l'excursion générique) : la première charge les excursions issues de réels strictement positifs et vérifie

(i) Conditionnellement à $\epsilon(0) = x$, l'excursion ϵ a même loi que X issu de x et tué à son premier temps d'atteinte de 0,

(ii) La distribution σ-finie de $\epsilon(0)$ est la mesure de Lévy de Y ;

la deuxième mesure charge les excursions issues de 0, et est proportionnelle à la mesure d'excursion du processus de Lévy X réfléchi sur son infimum.

Nous donnons également une construction trajectorielle du GCP(ψ, ϕ).

Théorème 0.3 *Soit $I_t = \inf_{s\leq t} X_s$. Si Y^{-1} est l'inverse à droite de Y et $\mathcal{R}$ la trace de Y sur $\mathbb{R}_+$, le processus $X^\star$ défini par*

$$X_t^\star \doteq X_t + \inf(\mathcal{R} \cap (-I_t, \infty)) = X_t + Y(Y^{-1}(-I_t)),$$

a pour loi $\mathbb{P}^\star$, après normalisation de son temps local L en 0 par $L_t^\star = Y^{-1}(-I_t)$.

Nous définissons ensuite le processus de hauteur $H^\star$ associé à $X^\star$ par une fonctionnelle similaire à (1). Nous prouvons le théorème suivant par des techniques de transformées de Laplace et de théorie des excursions. Ce théorème assure que le processus de hauteur décrit bien la généalogie d'un processus de branchement avec immigration.

Théorème 0.4 *La mesure d'occupation du processus de hauteur $H^\star$ admet p.s. une densité càdlàg $(Z_a^\star, a \geq 0)$, où $Z^\star$ est un CBI(ψ, ϕ).*

Nous montrons enfin une extension du théorème de Ray-Knight-Williams. Le point de départ est la question suivante : les processus de Lévy qui dérivent vers $+\infty$, et les processus de Lévy conditionnés à rester positifs [8], codent-ils pour une certaine généalogie dont la distribution serait à déterminer ?

Dans un souci de concision, nous supposerons que X désigne un processus de Lévy récurrent (d'exposant de Laplace ψ) conditionné à rester positif. Des arguments d'absolue continuité justifient l'existence d'un processus de hauteur H construit à partir des trajectoires de X comme précédemment. Dans le cas brownien, le processus X est le processus de Bessel de dimension 3 (BES(3)). On montre à l'aide du théorème d'équivalence de Lévy que le processus de hauteur H a même loi que X. Le théorème de Ray-Knight-Williams assure que le processus des temps locaux d'un BES(3) est un carré de Bessel de dimension 2 (BESQ(2)). On en déduit alors par des identités connues entre processus de branchement et carrés de Bessel que H est le processus de hauteur d'un CBI de mécanisme de branchement $\lambda \mapsto \lambda^2/2$ et de mécanisme d'immigration $\lambda \mapsto \lambda/2$.

Le théorème précédent et des opérations sur les excursions nous permettent de montrer que H est en général le processus de hauteur d'un CBI(ψ, ϕ), où $\phi : \lambda \mapsto \psi(\lambda)/\lambda$.

0.3 Chapitre 3 : le processus de branchement conditionné à ne jamais s'éteindre

Les dynamiques de populations animales en cours de colonisation ou de réintroduction sont modélisées par des processus de Galton-Watson surcritiques. Afin d'étudier les causes éventuelles d'échec de ces colonisations, on simule les cas d'extinction par un certain processus sous-critique dit dual, qui est le processus initial conditionné à s'éteindre p.s. Quand il s'agit d'étudier le comportement quasi-stationnaire de telles trajectoires (temps d'extinction très grands), la méthode de rejet est trop coûteuse, et l'on simule plutôt les trajectoires du processus (dual) conditionné à ne jamais s'éteindre, appelé Q-processus [1]. Le conditionnement se fait comme au chapitre précédent par transformée harmonique.

L'objet de ce chapitre est de construire et d'étudier le Q-processus dans un cadre continu. On désigne donc par Z un CB(ψ) s'éteignant p.s., par $\mathbf{P}$ sa loi, et par $\rho = \psi'(0+)$ le taux de décroissance géométrique de son espérance ($\rho \geq 0$).

Proposition 0.5 *Soit $x > 0$.*

(i) Les lois conditionnelles $\mathbf{P}_x(\cdot \mid T > t)$ admettent une limite notée $\mathbf{P}_x^{\uparrow}$ quand $t \to \infty$, au sens où pour tous $t \geq 0$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{P}_x(\Lambda \mid T > s) = \mathbf{P}_x^{\uparrow}(\Lambda).$$

La mesure de probabilité $\mathbf{P}^{\uparrow}$ est obtenue comme h-transformée par la martingale D

$$D_t = Z_t e^{\rho t},$$

c'est-à-dire

$$d\mathbf{P}^{\uparrow}_{x|\mathcal{F}_t} = \frac{D_t}{D_0} \,.\, d\mathbf{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

(ii) Le processus $Z^{\uparrow}$ qui a pour loi $\mathbf{P}_x^{\uparrow}$ est un CBI(ψ, ϕ) issu de x, où ϕ est (l'exposant de Laplace d'un subordinateur) donné par

$$\phi(\lambda) = \psi'(\lambda) - \psi'(0+), \qquad \lambda \geq 0.$$

Nous montrons ensuite que

$$\rho = 0 \text{ (cas critique) } \Rightarrow \lim_{t\to\infty} Z_t^{\uparrow} = +\infty \quad \text{p.s.},$$

où $Z^{\uparrow}$ désigne le Q-processus. La démonstration s'appuie sur le fait que le Q-processus est, dans le cas critique, un processus de Lévy (spectralement positif) conditionné à rester positif et changé de temps.

Dans le cas stable, ($\psi(\lambda) = \lambda^\alpha, \lambda \geq 0$, où $\alpha \in (1, 2]$), les processus Z et $Z^{\uparrow}$ sont solutions d'EDS qui mettent en lumière le mécanisme local d'immigration.

Théorème 0.6 *Le processus de branchement de mécanisme ψ est l'unique solution en loi de l'EDS suivante*

$$dZ_t = Z_{t-}^{1/\alpha} dX_t,$$

où X est un processus de Lévy α-stable d'exposant de Laplace ψ. De plus, le processus de branchement conditionné à ne jamais s'éteindre est solution de

$$dZ_t = Z_{t-}^{1/\alpha} dX_t + d\sigma_t,$$

où σ est un subordinateur $(\alpha - 1)$-stable d'exposant de Laplace ψ' indépendant de X.

0.4 Chapitre 4 : étude de deux constructions d'ensembles aléatoires emboîtés

Les processus de Lévy croissants, ou subordinateurs, forment une classe abondamment étudiée de processus de Lévy. Ils interviennent en particulier en théorie des fluctuations, en théorie des excursions, et en ce qui nous concerne ici, en théorie du renouvellement (l'équivalent discret des subordinateurs sont les marches aléatoires croissantes, appelées aussi processus de renouvellement). La (fermeture de la) trace d'un subordinateur est appelée ensemble régénératif, noté $\mathcal{R}$. Pour tout réel t fixé, on désigne par $(G(t), D(t))$ le plus grand intervalle ouvert ne rencontrant pas $\mathcal{R}$ et contenant t. L'âge $A(t) = t - G(t)$ est la durée qui s'est écoulée depuis le dernier passage dans $\mathcal{R}$ avant t, et le reste de vie $R(t) = D(t) - t$ est le temps qui sépare t du prochain passage dans $\mathcal{R}$. La théorie du renouvellement culmine dans l'énoncé de deux théorèmes, le théorème du renouvellement [9] et le théorème de Dynkin-Lamperti [6]. Ces deux théorèmes donnent la distribution limite quand $t \to \infty$, respectivement du couple $(A(t), R(t))$ lorsque $\mathcal{R}$ est récurrent-positif (les subordinateurs associés ont leurs marginales unidimensionnelles intégrables), et du couple $t^{-1}(A(t), R(t))$ lorsque $\mathcal{R}$ est à variation régulière (son comportement asymptotique est 'proche' de celui d'un régénératif stable).

D'autre part, les cascades de Ruelle [7] ont donné naissance récemment à de nombreux travaux sur la coalescence (voir [5], [17] et les références qui y sont mentionnées), qui sont une motivation pour étudier des ensembles aléatoires emboîtés : un ensemble régénératif induit une partition de $\mathbb{R}_+$ qui représente autant de morceaux d'un objet fragmenté ; une suite décroissante d'ensembles régénératifs induit un processus de coalescence (le 'recollement' des fragments).

Nous considérons à présent n ensembles régénératifs emboîtés $\mathcal{R}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_1$, ainsi que les âges et restes de vie qui leur sont associés $A_n(t), R_n(t), \ldots, A_1(t), R_1(t)$. Dans [3], il est montré que la distribution limite du n-uplet $(A_1(t), \ldots, A_n(t))$ ne dépend que des n lois individuelles de chacun des ensembles régénératifs. Nous montrons qu'il n'en est plus de même pour le $2n$-uplet $(A_1(t), R_1(t), \ldots, A_n(t), R_n(t))$. A cette fin, nous nous intéressons, à la suite de [5], à deux constructions naturelles d'ensembles régénératifs emboîtés, l'une basée sur la subordination de Bochner, et l'autre sur l'intersection d'ensem- bles régénératifs indépendants.

Lorsque les ensembles considérés sont stationnaires, nous montrons pour chaque construction que le n-uplet $(A_k(t), R_k(t); 1 \leq k \leq n)$ est pour t fixé une chaîne de Markov inhomogène $(A_k, R_k; 1 \leq k \leq n)$ dont nous donnons les noyaux de transition. Dans la situation à la Bochner, cette chaîne est à accroissements indépendants. Dans le deuxième cas, pour tous $1 \leq k \leq n-1$, (A_{k+1}, R_{k+1}) est indépendant de (A_k, R_k) conditionnellement à $A_k + R_k$.

Dans le cas d'ensembles stables $\mathcal{R}_\gamma \subset \mathcal{R}_\alpha$ d'indices respectifs $1-\gamma$ et $1-\alpha$ ($0 < \alpha < \gamma < 1$), nous montrons que la loi de $(G_\alpha(1), D_\alpha(1), G_\gamma(1), D_\gamma(1))$ diffère selon la construction choisie. En particulier, dans le cas des intersections, $\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{R}_\alpha \cap \bar{\mathcal{R}}$ où $\bar{\mathcal{R}}$ est un régénératif stable d'indice $\beta = \gamma - \alpha$ indépendant de $\mathcal{R}_\alpha$, nous montrons le théorème suivant à l'aide des recouvrements aléatoires de la droite ([5], [10]) :

Théorème 0.7 *Conditionnellement à $G_\alpha(1) = g$, $D_\alpha(1) = d$,*

$$(\frac{1}{G_\gamma(1)}, D_\gamma(1)) \stackrel{(d)}{=} (\frac{1}{g} + (\frac{1}{m} - \frac{1}{g})\frac{1}{\Gamma}, \; d + (M-d)\Delta),$$

où Γ et Δ sont deux v.a. indépendantes, indépendantes de (m, M), de même loi que $G_\gamma(1)$ et $D_\gamma(1)$ respectivement, et

$$I\!P(m > u, M < v) \quad = \quad \left(\frac{(g-u)(v-d)}{g(v-u)}\right)^\beta \qquad u \in (0,g), v \in (d, \infty).$$

Bibliographie

[1] Athreya K.B., Ney P.E. (1972)
Branching processes. Springer-Verlag, New York.

[2] Bertoin J. (1997)
Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval. Ann. Appl. Prob. **7** 156-169.

[3] Bertoin J. (1999)
Renewal theory for embedded regenerative sets. Ann. Probab. **27** 1523-1535.

[4] Bertoin J., Le Gall J.F. (2000)
The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. Probab. Theory Relat. Fields **117** 249-266.

[5] Bertoin J., Pitman J. (2000)
Two coalescents derived from the ranges of stable subordinators. Electronic J. Probab. **5**.

[6] Bingham N., Goldie C., Teugels J.L. (1987)
Regular variation. Cambridge Univ. Press.

[7] Bolthausen E., Sznitman A.S. (1998)
On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method. Comm. Math. Physics **197** 247-276.

[8] Chaumont L. (1994)
Sur certains processus de Lévy conditionnés à rester positifs. Stochastics Stoch. Reports **47** 1-20.

[9] Feller W.E. (1971)
An Introduction to Probability Theory and Its Applications **2**, 2nd ed. Wiley, New York.

[10] Fitzsimmons P.J., Fristedt B.E., Shepp L.A. (1985)
The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **70** 175-189.

[11] Knight F.B. (1969)
Brownian local times and taboo processes. Trans. Amer. Math. Soc. **143** 173-185.

[12] Lambert A. (2000)
Completely asymmetric Lévy processes confined in a finite interval. Ann. Inst. Henri Poincaré **36** 251-274.

[13] Lambert A. (2000)
Genealogy of continuous-state branching processes with immigration. To appear in Probab. Theory Relat. Fields.

[14] Le Gall J.F. (1999)
Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser.

[15] Le Gall J.F., Le Jan Y. (1998)
Branching processes in Lévy processes : the exploration process. Ann. Probab. **26** 213-252.

[16] Lyons R., Pemantle R., Peres Y. (1995)
Conceptual proofs of $L \log L$ criteria for mean behavior of branching processes. Ann. Probab. **23** 1125-1138.

[17] Pitman J. (1999)
Coalescents with multiple collisions. Ann. Probab. **27** 1870-1902.

[18] Prabhu N.U. (1981)
Stochastic Storage Processes, Queues, Insurance Risk and Dams. Springer, Berlin.

[19] Takács L. (1966)
Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. Wiley, New York.

Chapitre 1

Sur le conditionnement des processus de Lévy complètement asymétriques à demeurer indéfiniment dans $(0, a)$

Ce chapitre fait l'objet d'une publication aux Annales de l'Institut Henri Poincaré [16].

Résumé. Considérons un processus de Lévy complètement asymétrique dont les probabilités de transition sont absolument continues. Nous établissons l'existence par transformée harmonique du processus conditionné à demeurer dans un intervalle fini, appelé le processus confiné (le mouvement brownien confiné est le processus tabou brownien de F.B. Knight). Nous montrons que le processus confiné est récurrent-positif et mettons en évidence quelques identités utiles concernant sa mesure d'excursion hors d'un point. Nous traitons la vitesse de convergence du processus des supréma vers la borne supérieure de l'intervalle.

AMS subject classification (2000) : 60K05.
Key words : Lévy process - Completely asymmetric - Conditional law - h-transform - Excursion measure.

1.1 Introduction

Un processus de Lévy est un processus stochastique à trajectoires càdlàg et à accroissements indépendants et stationnaires. On dit qu'il est complètement asymétrique lorsqu'il est à valeurs réelles et que ses sauts sont tous de même signe. De tels processus ont été étudiés à plusieurs reprises, pour leurs propriétés intrinsèques ([6], [7], [18], [26]) comme pour leurs applications ([8], [19]), en particulier les files d'attente, les mathématiques financières et la théorie des assurances.

Leur connection avec les processus de branchement ([7], [13], [18]) ainsi que leurs applications en ce qui concerne la théorie des barrages artificiels, sont deux exemples de l'intérêt que l'on peut porter au comportement de tels processus avant leur sortie d'un intervalle fini (c'est-à-dire avant l'extinction d'une espèce animale et la surpopulation, ou avant le débordement et l'assèchement du barrage). Plus formellement, on se donne un réel strictement positif a et un processus de Lévy X à valeurs dans $\mathbb{R}$ sans sauts positifs, issu de $x \in (0,a)$; on désignera par T le premier temps de sortie de cet intervalle, c'est-à-dire :

$$T \doteq \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (0,a)\}.$$

La première question que l'on se pose est donc celle de l'existence d'une limite en un certain sens, lorsque $t \to \infty$, des lois conditionnelles $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T > t)$.

Il faut commencer par résoudre le problème classique de la double sortie, qui a fait l'objet de plusieurs publications ([3], [12], [23], [24], [26]), et qui consiste à déterminer avec quelle probabilité le processus X va sortir par le haut de l'intervalle $(0,a)$. Les processus de Lévy complètement asymétriques admettent une réponse simple à ce problème, et l'article récent de J. Bertoin [4] donne de précieux résultats sur le comportement asymptotique de $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T > t)$, sur lesquels nous nous appuierons.

Dans la suite, nous mettons en évidence la loi limite, désignée par $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, de ces lois conditionnelles quand $t \to \infty$, et ses propriétés fondamentales (récurrence positive, probabilité stationnaire). Nous présentons ensuite différentes caractéristiques de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ (transformées de Laplace des premiers temps de passage, noyau de Lévy, lemme de dualité), puis nous nous intéressons à la mesure d'excursion sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ hors de $\{x\}$ (absolue continuité par rapport à la mesure d'excursion hors de $\{x\}$ sous $\mathbb{P}$, désintégration par rapport à son instant de saut à travers x, 'loi' du maximum). Une section est consacrée à l'étude de la vitesse de convergence du suprémum local S_t vers a sous deux formes : une convergence en loi de $t(a - S_t)$ et un principe du logarithme itéré (trajectoriel). Nous montrons enfin que la loi $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ peut s'obtenir à partir de divers conditionnements distincts, ce qui nous permet de déduire l'existence d'une loi d'entrée en 0.

Précisons que la loi du processus confiné dans le cas brownien coïncide avec celle du 'processus tabou brownien' mis en évidence par F.B. Knight dans [15], avec états tabous $\{0,a\}$.

1.2 Préliminaires

Cette section contient quelques résultats généraux sur les processus de Lévy spectralement négatifs, ainsi que les outils introduits dans [4].

On désigne par $\mathbb{P}_x$ une mesure de probabilité définie sur l'espace $\Omega = \mathcal{D}([0,\infty),\mathbb{R})$ des fonctions càdlàg de $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et de la topologie de Skorohod. Sous $\mathbb{P}_x$, le processus canonique X est un processus de Lévy issu de x sans sauts positifs. De plus, on fait les hypothèses suivantes : X n'est ni un processus déterministe, ni l'opposé d'un subordinateur, et l'on suppose vérifiée l'hypothèse (AC) d'absolue continuité des distributions unidimensionnelles du processus :

$$(AC) \qquad \mathbb{P}_0(X_t \in dx) \ll dx \qquad \text{pour tout } t > 0.$$

Précisons que cette dernière hypothèse ne joue un rôle que dans la démonstration du théorème énoncé à la fin de cette section.

La transformée de Laplace de X_t est donnée par :

$$\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{\lambda X_t}) = \mathrm{e}^{t\psi(\lambda)} \qquad \lambda, t \geq 0,$$

où $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est appelé exposant de Laplace, et est une fonction convexe telle que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \psi(\lambda) = +\infty.$$

On désigne par $\phi(0)$ sa plus grande racine : si $\phi(0) > 0$, ψ a exactement deux racines (0 et $\phi(0)$), sinon ψ n'a qu'une racine, et $\phi(0) = 0$. On peut alors inverser ψ sur $[\phi(0), \infty)$ et son inverse continu à droite $\phi : [0, \infty) \to [\phi(0), \infty)$ vérifie :

$$\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{-qT_{\{x\}}}) = \mathrm{e}^{-\phi(q)x} \qquad q, x \geq 0,$$

avec la notation suivante, que l'on reprendra dans la suite :

$$T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\},$$

pour A borélien quelconque de $\mathbb{R}$.

Par la formule de Lévy-Khintchine, ψ s'écrit

$$\psi(\lambda) = m\lambda + \frac{b}{2}\lambda^2 + \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{e}^{\lambda r} - 1 - \lambda r \mathbf{1}_{\{r > -1\}})\Lambda(dr), \tag{1.1}$$

où Λ désigne la mesure de Lévy du processus, et b son coefficient gaussien.

On rappelle les faits suivants : les trajectoires de X sont p.s. à variation finie ou p.s. à variation infinie selon que la condition suivante est ou non vérifiée : $b = 0$ et $\int^0 r\Lambda(dr)$ converge. De plus, selon que $\psi'(0) \in (0, \infty)$, $\psi'(0) = 0$, ou $\psi'(0) \in [-\infty, 0)$, X dérive vers $+\infty$, est récurrent, ou dérive vers $-\infty$.

Passons maintenant à ce qui appartient plus spécifiquement à [4] : le point de départ de cet article est le problème de la double sortie, c'est-à-dire le calcul de la probabilité que la sortie de l'intervalle $(0, a)$ se fasse par le haut plutôt que par le bas, autrement dit que T soit égal à T_a (avec l'abus de notation $T_a = T_{\{a\}}$). La solution de ce problème est essentiellement due à Takács [26] : il existe une unique fonction W continue positive définie sur $\mathbb{R}_+$, de transformée de Laplace

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda)} \qquad \lambda > \phi(0),$$

telle que pour tout $x \in (0, a)$,

$$\mathbb{P}_x(X_T = a) = W(x)/W(a). \tag{1.2}$$

La fonction W, qui est strictement croissante, est appelée fonction d'échelle. On sait également exprimer la transformée de Laplace de T sur $\{X_T = a\}$:

$$\mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{-qT}, X_T = a) = W^{(q)}(x)/W^{(q)}(a) \qquad q > 0, \tag{1.3}$$

où $W^{(q)}$ est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante, et de transformée de Laplace

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda) - q} \qquad \lambda > \phi(q).$$

De plus, pour tout $x \geq 0$, la fonction $q \mapsto W^{(q)}(x)$ est une fonction développable en série entière définie sur $\mathbb{R}_+$ que l'on peut prolonger analytiquement à $\mathbb{R}$ tout entier ; son développement est donné par l'équation suivante, où $W^{\star k}$ désigne la k-ième puissance de convolution de W :

$$W^{(q)}(x) = \sum_{k \geq 0} q^k W^{\star k+1}(x), \tag{1.4}$$

la convergence de cette série étant justifiée par l'inégalité suivante due à la croissance de la fonction d'échelle :

$$W^{\star k+1}(x) \leq \frac{x^k W(x)^{k+1}}{k!} \qquad x \geq 0, k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Donnons également l'expression d'une version de la densité de la q-résolvante $u^q(x, y)$, du processus tué à son premier temps de sortie de $(0, a)$ (cf [4, p.159]) :

$$u^q(x, y) = \frac{W^{(q)}(x)W^{(q)}(a - y)}{W^{(q)}(a)} - \mathbf{1}_{\{x \geq y\}} W^{(q)}(x - y), \qquad x, y \in (0, a). \tag{1.6}$$

On peut à présent énoncer le résultat principal de [4] qui emprunte à la terminologie de [27], similaire à celles des théorèmes de Perron-Frobenius, avec la notation :

$$P^t(x, A) = \mathbb{P}_x(X_t \in A, t < T),$$

où $x \in (0, a)$ et A est un borélien de $(0, a)$.

Théorème 1.1 *Soit* $\rho \doteq \inf\{q \geq 0 : W^{(-q)}(a) = 0\}$.
Alors ρ est fini et strictement positif, et pour tous $q < \rho$ et $x \in (0, a)$, $W^{(-q)}(x) > 0$. De plus,

(i) ρ est une racine simple de la fonction développable en série entière $q \mapsto W^{(-q)}(a)$;
(ii) P^t est ρ-récurrent et, plus précisément, ρ-positif ;
(iii) la fonction $W^{(-\rho)}$ est strictement positive sur $(0, a)$ et est ρ-invariante par P^t :

$$P^t W^{(-\rho)}(x) = e^{-\rho t} W^{(-\rho)}(x), \qquad \text{pour tout } x \in (0, a);$$

(iv) la mesure $\Pi(dx) = W^{(-\rho)}(a - x)dx$ sur $(0, a)$ est ρ-invariante par P^t :

$$\Pi P^t(dx) = e^{-\rho t}\Pi(dx);$$

(v) il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \in (0, a)$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{\rho t} P^t(x, \cdot) = \frac{1}{c} W^{(-\rho)}(x)\Pi(\cdot),$$

au sens de la convergence faible.

Exemple des stables. Dans le cas des processus complètement asymétriques stables d'indice $\alpha \in (1, 2]$, avec $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$, si l'on désigne par E_α la fonction de Mittag-Leffler de paramètre α, soit :

$$E_\alpha(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}, \tag{1.7}$$

alors (cf [3])

$$W^{(q)}(x) = \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(q x^\alpha),$$

et par conséquent

$$\rho = r(\alpha) a^{-\alpha},$$

où $-r(\alpha)$ est la première racine négative de E'_α. On remarquera en particulier que $x \mapsto W^{(q)}(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\star$, ce pour tous $q \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in (1, 2]$, ainsi que la simplicité de la dépendance en a de $\rho(a)$.

Plus spécifiquement, pour $\alpha = 2$, le mouvement brownien confiné dans $(0, a)$ a les caractéristiques suivantes, que l'on retrouve par ailleurs dans [15] :

$$\begin{aligned} W^{(-q)}(x) &= q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2q}x), \\ c &= \frac{2a^3}{\pi^2}, \\ \rho &= \frac{\pi^2}{2a^2}. \end{aligned}$$

Même si la connaissance de [27] n'est pas nécessaire pour la suite, mentionnons que la démonstration du théorème s'appuie en grande partie sur la théorie qui y est développée par P. Tuominen et R.L. Tweedie, et qui est une extension au cas continu des résultats de E. Seneta et D. Vere-Jones sur les chaînes de Markov (cf [25] et [28]).

On peut à présent passer à la construction de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, dont on verra qu'elle utilise de manière incontournable les outils développés précédemment.

1.3 Construction de la loi $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ du processus confiné

Répétons que dans toute la suite, la condition (AC) est supposée vérifiée, et que T désigne le premier temps de sortie de l'intervalle $(0, a)$ par le processus X issu d'un réel quelconque $x \in (0, a)$.

Théorème 1.2 *Soit $x \in (0, a)$.*

(i) Les lois conditionnelles $I\!P_x(\cdot \mid T > t)$ *admettent une limite notée* $I\!P_x^{\updownarrow}$ *quand* $t \to \infty$*, au sens où pour tous* $s \geq 0$ *et* $\Lambda \in \mathcal{F}_s$*,*

$$\lim_{t\to\infty} I\!P_x(\Lambda \mid T > t) = I\!P_x^{\updownarrow}(\Lambda).$$

(ii) La mesure de probabilité $I\!P^{\updownarrow}$ *est également obtenue comme h-transformée de* $I\!P$ *par la* $(I\!P, (\mathcal{F}_t))$*-martingale* D

$$D_t = e^{\rho t}\mathbf{1}_{\{t<T\}}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W^{(-\rho)}(x)},$$

c'est-à-dire

$$dI\!P^{\updownarrow}_{x|\mathcal{F}_t} = D_t \,.\, dI\!P_{x|\mathcal{F}_t}$$

(iii) Sous $I\!P^{\updownarrow}$*, le processus canonique est un processus de Markov fort homogène. Sa* λ*-résolvante admet pour densité* $(\lambda > 0)$

$$u_\lambda^{\updownarrow}(x,y) = \left(\frac{W^{(\lambda-\rho)}(x)W^{(\lambda-\rho)}(a-y)}{W^{(\lambda-\rho)}(a)} - \mathbf{1}_{\{x>y\}}W^{(\lambda-\rho)}(x-y)\right)\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)}. \tag{1.8}$$

(iv) Sous $I\!P^{\updownarrow}$*,* X *est récurrent-positif avec probabilité stationnaire*

$$\mu(dx) = \frac{W^{(-\rho)}(x)\Pi(dx)}{c(a)} = p(x)dx,$$

où

$$p(x) = \frac{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(a-x)}{c(a)},$$

et

$$c(a) = \frac{\partial W^{(\lambda)}(a)}{\partial \lambda}_{|\lambda=-\rho}$$

$(c(a) \in (0,\infty)$ *par le théorème 1.1(i)). Enfin, la densité* p *est continue sur* $[0,a]$*, s'annule en 0 et en* a*, est symétrique par rapport à* $a/2$ *et est unimodale : elle croît sur* $(0,a/2)$ *et décroît sur* $(a/2,a)$*.*

Remarque. Un calcul rapide montre que la constante c du théorème 1.1(v) est la même que celle de l'assertion (iv) du précédent théorème.

Dém.

(ii) On commence par montrer que D est une $\mathbb{P}$-martingale en utilisant la propriété de Markov sous $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(D_{t+s} \mid \mathcal{F}_t) &= \frac{e^{\rho(t+s)}}{W^{(-\rho)}(x)}\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{t+s<T\}}W^{(-\rho)}(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{e^{\rho(t+s)}}{W^{(-\rho)}(x)}\mathbf{1}_{\{t<T\}}\mathbb{E}_{X_t}(\mathbf{1}_{\{s<T\}}W^{(-\rho)}(X_s)).\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_{X_t}(\mathbf{1}_{\{s<T\}}W^{(-\rho)}(X_s)) = P^s W^{(-\rho)}(X_t) = \mathrm{e}^{-\rho s}W^{(-\rho)}(X_t),$$

la dernière égalité découlant de l'assertion (iii) du théorème 1.1.

(i) Pour prouver la convergence des lois conditionnelles, prenons $t, s > 0$ et Y une v.a. bornée mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$. D'après le théorème 1.1, on voit facilement que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\mathbb{P}_y(T > s)}{\mathbb{P}_x(T > t+s)} = \mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)},$$

par (v) et la définition de la convergence faible. On a donc la convergence p.s. quand $s \to \infty$ des v.a. :

$$D_{t,s} = \mathbf{1}_{\{T>t\}}\frac{\mathbb{P}_{X_t}(T > s)}{\mathbb{P}_x(T > t+s)}$$

vers $D_t = \mathrm{e}^{\rho t}\mathbf{1}_{\{t<T\}}W^{(-\rho)}(X_t)/W^{(-\rho)}(x)$. De plus,

$$\mathbb{E}_x(D_{t,s}) = \mathbb{E}_x(1 \mid T > t+s) = 1,$$

qui converge quand $s \to \infty$ vers $1 = \mathbb{E}_x(D_t)$, donc d'après le lemme de Scheffe, la suite de v.a. positives $(D_{t,s})_{s\geq 0}$ converge vers D_t dans $L^1(\mathcal{F}_t)$. De ce fait, la v.a. Y étant bornée, $\mathbb{E}_x(YD_{t,s})$ converge vers $\mathbb{E}_x(YD_t)$, autrement dit :

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}_x(Y \mid T > t+s) = \mathbb{E}_x(YD_t) = \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(Y).$$

On obtient ainsi la convergence souhaitée des lois conditionnelles $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T > t)$ quand $t \to \infty$ vers la mesure de probabilité $\mathbb{P}_x^{\updownarrow}$.

(iii) Montrons la propriété de Markov homogène : soit $Y \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ et f une fonction mesurable bornée, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(f(X_{t+s})Y) &= \mathbb{E}_x(f(X_{t+s})YD_{t+s}) \\
&= \mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{-\rho s}W^{(-\rho)}(X_t)\mathbb{E}_{X_t}^{\updownarrow}(f(X_s))Y\mathbf{1}_{\{t<T\}}\frac{\mathrm{e}^{\rho t}}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
&= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_t}^{\updownarrow}(f(X_s))YD_t) \\
&= \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\mathbb{E}_{X_t}^{\updownarrow}(f(X_s))Y).
\end{aligned}$$

Le fait que les h-transformées conservent la propriété forte de Markov est classique : on pourra le vérifier en consultant par exemple [10, théorème XVI.28 p.329] ; on verra plus loin que le semi-groupe $(\mathbb{P}_x^{\updownarrow}, x \in (0,a))$ est même fellérien.

Calculons la densité de la λ-résolvante, soit $u_\lambda^{\updownarrow}(x,y)$, définie pour toute fonction f borélienne positive par :

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}f(X_t)dt) = \int_0^a f(y)u_\lambda^{\updownarrow}(x,y)dy,$$

son existence découlant de celle de la λ-résolvante sous $\mathbb{P}_x$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\updownarrow}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} f(X_t)dt\right) &= \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^a P_t^{\updownarrow}(x,dy) f(y) \\
&= \int_0^a u^{\lambda-\rho}(x,y) f(y) \frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)} dy,
\end{aligned}$$

car le semi-groupe de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ est trivialement donné par :

$$P_t^{\updownarrow}(x,dy) = P^t(x,dy)\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)} = \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < T)\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)}.$$

On tire de (1.6) le résultat requis.

(iv) Prouvons que μ est invariante par $P_t^{\updownarrow}$ quel que soit t, en utilisant la proposition (iv) du théorème 1.1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^a c\mu(dx) P_t^{\updownarrow}(x,dy) &= \int_0^a W^{(-\rho)}(x)\Pi(dx)P^t(x,dy)\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)} \\
&= \mathrm{e}^{\rho t} W^{(-\rho)}(y) \int_0^a \Pi(dx) P^t(x,dy) \\
&= \mathrm{e}^{\rho t} W^{(-\rho)}(y)\mathrm{e}^{-\rho t}\Pi(dy) = W^{(-\rho)}(y)\Pi(dy) \\
&= c\mu(dy).
\end{aligned}$$

Le calcul de la constante de normalisation $c(a)$ repose sur l'observation suivante :

$$c(a) = W^{(-\rho)} \star W^{(-\rho)}(a),$$

et sur le développement en série entière (1.4).

Il est clair que la densité p est symétrique, continue, et s'annule en 0 et en a, puisque $W^{(-\rho)}$ est continue et s'annule en a.

Il reste à montrer l'unimodalité : un appel à la proposition 1.11 (à venir) nous permet de dériver $W^{(-\rho)}$ en tout point de $(0,\infty)$. Or grâce à la proposition 1.8 (à venir), nous savons que pour tout $y \in (0,a)$, la fonction

$$\eta \mapsto \frac{W^{(-\rho)}(y+\eta)}{W^{(-\rho)}(\eta)}$$

décroît sur $(0, a-y)$. Par dérivation logarithmique, on obtient

$$\frac{W^{(-\rho)\prime}(\eta+y)}{W^{(-\rho)}(\eta+y)} - \frac{W^{(-\rho)\prime}(\eta)}{W^{(-\rho)}(\eta)} \leq 0,$$

par conséquent la fonction

$$\eta \mapsto \frac{W^{(-\rho)\prime}(\eta)}{W^{(-\rho)}(\eta)}$$

décroît sur $(0,a)$, et

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{W^{(-\rho)\prime}(x)}{W^{(-\rho)}(x)} - \frac{W^{(-\rho)\prime}(a-x)}{W^{(-\rho)}(a-x)}$$

est donc positif sur $(0,a/2)$ et négatif sur $(a/2,a)$. $\square$

1.4 Quelques caractéristiques utiles de $I\!P^{\updownarrow}$

On donne ici une expression des transformées de Laplace des premiers temps de passage aux niveaux plus hauts que x, mais aussi aux niveaux plus bas, ainsi que du noyau de Lévy du processus canonique sous $I\!P_x^{\updownarrow}$. Un lemme de dualité sera également énoncé.

Nous allons dans la suite utiliser fréquemment le résultat suivant : pour tout temps d'arrêt S fini p.s., si Y est une v.a. positive $\mathcal{F}_S$-mesurable, alors $I\!E_x^{\updownarrow}(Y) = I\!E_x(YD_S)$. La démonstration en est immédiate :

$$\begin{aligned} I\!E_x^{\updownarrow}(Y) &= \lim_{t\to\infty} \uparrow I\!E_x^{\updownarrow}(Y\mathbf{1}_{\{t>S\}}) \\ &= \lim_{t\to\infty} \uparrow I\!E_x(Y\mathbf{1}_{\{t>S\}}D_{t\wedge S}) \\ &= I\!E_x(YD_S), \end{aligned}$$

grâce à deux applications successives du théorème de convergence monotone.

Proposition 1.3 *On rappelle que pour tout borélien A, T_A désigne le premier temps d'atteinte de A. On a, pour tous $0<b<x<c<a$, les expressions suivantes :*

(i) Problème de la double sortie sous $I\!P_x^{\updownarrow}$: avec

$$T' \doteq \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (b,c)\},$$

$$I\!E_x^{\updownarrow}(e^{-qT'}\mathbf{1}_{\{X_{T'}=c\}}) = \frac{W^{(-\rho)}(c)}{W^{(-\rho)}(x)}\frac{W^{(q-\rho)}(x-b)}{W^{(q-\rho)}(c-b)}.$$

(ii) Passage aux niveaux supérieurs :

$$I\!E_x^{\updownarrow}(\exp(-qT_c)) = \frac{W^{(-\rho)}(c)}{W^{(-\rho)}(x)}\frac{W^{(q-\rho)}(x)}{W^{(q-\rho)}(c)}.$$

(iii) Passage aux niveaux inférieurs :

$$I\!E_x^{\updownarrow}(\mathbf{1}_{\{X_{T_{(0,b)}-}\in dy\}}\mathbf{1}_{\{\Delta X_{T_{(0,b)}}\in dz\}}\exp(-qT_{(0,b)})) =$$

$$= \frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}\left(\frac{W^{(q-\rho)}(x-b)W^{(q-\rho)}(a-y)}{W^{(q-\rho)}(a-b)} - \mathbf{1}_{\{x\geq y\}}W^{(q-\rho)}(x-y)\right)dy\Lambda(dz).$$

Dém. (i) et (ii) résultent directement de la relation d'absolue continuité sur $\mathcal{F}_S$ de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ par rapport à $\mathbb{P}$, où S désigne tour à tour T' et T_c, ainsi que de (1.3).

(iii) Si maintenant $0 < b < x < a$, $0 < b < y < a$, $0 < y + z < b$, on calcule, par la formule de compensation appliquée au processus de Poisson ponctuel des sauts, la quantité suivante, où l'on a simplifié momentanément $T_{(0,b)}$ en T'_b :

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\mathbf{1}_{\{X_{T'_b-}\in dy\}}\mathbf{1}_{\{\Delta X_{T'_b}\in dz\}}\exp(-qT'_b)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{X_{T'_b-}\in dy\}}\mathbf{1}_{\{\Delta X_{T'_b}\in dz\}}\mathrm{e}^{(\rho-q)T'_b}\mathbf{1}_{\{T'_b<T\}}\frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
&= \mathbb{E}_x(\sum_{t\geq 0}\mathbf{1}_{\{X_{t-}\in dy\}}\mathbf{1}_{\{\Delta X_t\in dz\}}\mathrm{e}^{(\rho-q)t}\mathbf{1}_{\{X_s\in(b,a)\forall s<t\}}\frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_0^\infty dt\Lambda(dz)\mathbf{1}_{\{X_t\in dy\}}\mathrm{e}^{(\rho-q)t}\mathbf{1}_{\{X_s\in(b,a)\forall s\leq t\}}\frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
&= \Lambda(dz)\int_0^\infty dt\mathrm{e}^{(\rho-q)t}P^t_{(a-b)}(x-b,dy-b)\frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
&= \Lambda(dz)\frac{W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(x)}u^{(q-\rho)}_{(a-b)}(x-b,dy-b),
\end{aligned}$$

où $u^q_{(a-b)}$ désigne toujours la densité de la q-résolvante du processus, mais cette fois tué à son premier temps d'atteinte de $(-\infty,0]\cup[a-b,+\infty)$, d'où l'on tire le résultat grâce à (1.6). □

Dans la terminologie de [10, pp.250 à 253], on met en évidence le noyau de Lévy $N(x,dz)$ du processus confiné en fonction de celui $\Lambda(dz)$ du processus initial.

Proposition 1.4 *Sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, le processus canonique admet un système de Lévy de noyau $N(x,dz)$, où, pour tout $x\in(0,a)$,*

$$N(x,dz) = \mathbf{1}_{\{x+z\in(0,a)\}}\frac{W^{(-\rho)}(x+z)}{W^{(-\rho)}(x)}\Lambda(dz).$$

Dém. Soit f une fonction borélienne positive de deux variables réelles, nulle sur la diagonale, et H_t un processus prévisible positif. Si l'on désigne par $\bar{N}$ le noyau défini à partir de N par :

$$\bar{N}(x,dydz) = \delta_x(dy)N(x,dz-x),$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x, alors il suffit de montrer, d'après le théorème 35 p.253 de [10], que

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\sum_{s\geq 0}H_sf(X_{s-},X_s)) = \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^\infty dsH_s\bar{N}f(X_s)).$$

Or si $(A_t, t \geq 0)$ est le processus croissant adapté suivant :

$$A_t = \sum_{s \leq t} f(X_{s-}, X_s),$$

et si l'on se rappelle que D_t est la densité sur $\mathcal{F}_t$ de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ par rapport à $\mathbb{P}$, alors, d'après le théorème de projection optionnelle ($n°57$ dans [9]) appliqué à la filtration $\mathcal{F}_t$ et au processus croissant A,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\sum_{s \leq t} H_s f(X_{s-}, X_s)) &= \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^t H_s dA_s) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_0^t D_t H_s dA_s) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_0^t D_s H_s dA_s) \\
&= \mathbb{E}_x(\sum_{s \leq t} H_s f(X_{s-}, X_s) D_s),
\end{aligned}$$

car $(s, \omega) \mapsto H_s D_{s \wedge t}(\omega)$ est la projection optionnelle de $(s, \omega) \mapsto H_s D_t(\omega)$. Faisant tendre t vers l'infini, et appliquant la formule de compensation au processus de Poisson ponctuel des sauts sous $\mathbb{P}$, il vient que la quantité $\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\sum_{s \geq 0} H_s f(X_{s-}, X_s))$ vaut

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \left(\sum_{s \geq 0} H_s f(X_{s-}, X_{s-} + \Delta X_s) \mathrm{e}^{\rho s} \mathbf{1}_{\{X_u \in (0,a) \forall u < s\}} \mathbf{1}_{\{X_{s-} + \Delta X_s \in (0,a)\}} \frac{W^{(-\rho)}(X_{s-} + \Delta X_s)}{W^{(-\rho)}(x)} \right) \\
= &\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^0 \Lambda(dz) \mathbb{E}_x (H_s f(X_s, X_s + z) \mathbf{1}_{\{X_s + z \in (0,a)\}} \mathrm{e}^{\rho s} \mathbf{1}_{\{X_u \in (0,a) \forall u \leq s\}} \frac{W^{(-\rho)}(X_s + z)}{W^{(-\rho)}(x)}) \\
= &\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^0 \Lambda(dz) \mathbb{E}_x^{\updownarrow} (H_s f(X_s, X_s + z) \mathbf{1}_{\{X_s + z \in (0,a)\}} \frac{W^{(-\rho)}(X_s + z)}{W^{(-\rho)}(X_s)}) \\
= &\mathbb{E}_x^{\updownarrow} \left(\int_0^\infty ds H_s \int_{\mathbb{R}} N(X_s, dz) f(X_s, X_s + z) \right) \\
= &\mathbb{E}_x^{\updownarrow} \left(\int_0^\infty ds H_s \bar{N} f(X_s) \right),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. On observera que les sauts de petite amplitude sont aveugles à la contrainte de confinement dans le sens où pour tout $x \in (0, a)$,

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{N(x, dz)}{\Lambda(dz)} = 1.$$

Pour terminer cette section, nous allons étudier ce que devient le lemme de dualité sous la nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{P}^{\updownarrow}$. La propriété de Markov appliquée au temps fixe

t entraîne que le pont $x \xrightarrow{t} y$ a même loi sous $\mathbb{P}(\cdot \mid T > t)$ que sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$. On a donc l'existence des lois conditionnelles $\mathbb{P}^{\updownarrow}_x(\cdot \mid X_t = y)$, et de versions telles que

$$\mathbb{P}^{\updownarrow}_x(\cdot \mid X_t = y) = \mathbb{P}_x(\cdot \mid X_t = y, t < T) = \frac{\mathbb{P}_x(\cdot, t < T \mid X_t = y)}{\mathbb{P}_x(t < T \mid X_t = y)}.$$

Donc pour tous $x, y \in (0, a)$, et toute fonctionnelle F, et d'après le lemme de dualité pour les processus de Lévy,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\updownarrow}_x(F(a - X_{(t-s)-}; s \le t) \mid X_t = y) &= \frac{\mathbb{E}_x(F(a - X_{(t-s)-}; s \le t)\mathbf{1}_{\{t<T\}} \mid X_t = y)}{\mathbb{P}_x(t < T \mid X_t = y)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{a-y}(F(X_s; s \le t)\mathbf{1}_{\{t<T\}} \mid X_t = a - x)}{\mathbb{P}_{a-y}(t < T \mid X_t = a - x)} \\
&= \mathbb{E}^{\updownarrow}_{a-y}(F(X_s; s \le t) \mid X_t = a - x).
\end{aligned}$$

Autrement dit, on peut énoncer la

Proposition 1.5 (lemme de dualité) *Pour tous $x, y \in (0, a), t > 0$ fixé, la loi de $(a - X_{(t-s)-}, s \le t)$ sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}_x(\cdot \mid X_t = y)$ est une version de la loi conditionnelle de $(X_s, s \le t)$ sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}_{a-y}(\cdot \mid X_t = a - x)$.*

1.5 Mesure d'excursion hors de $\{x\}$ du processus confiné

Choisissons x quelconque dans $(0, a)$. On dit que x est régulier (pour lui-même) si

$$\mathbb{P}^{\updownarrow}_x(\inf\{s > 0 : X_s = x\} = 0) = 1,$$

cette dernière probabilité étant nulle si x n'est pas régulier. Il est manifeste que x est régulier sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ si et seulement s'il l'est sous $\mathbb{P}$, donc si et seulement si X est à variation infinie sous $\mathbb{P}$ (cf [4, corollaire VII.5]). Dans toute cette partie nous nous placerons sous cette hypothèse.

1.5.1 La mesure d'excursion $n^{\updownarrow}_x$

On sait, grâce à la régularité de x, définir la densité d'occupation en x par rapport à la mesure de Lebesgue (cf [2, proposition V.2]), appelée aussi temps local au niveau x :

$$L^x_t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s - x| < \varepsilon\}} ds. \tag{1.9}$$

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, nous noterons simplement cette densité L_t. Soit $(\tau_s, s \ge 0)$ son inverse à droite :

$$\tau_s = \inf\{t > 0 : L_t > s\}.$$

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des excursions hors de $\{x\}$, c'est-à-dire l'ensemble des trajectoires càdlàg ϵ de durée de vie générique $V = V(\epsilon)$ telles que $\epsilon(t) \neq x$ pour tout $t \in (0, V)$, $\epsilon(0) = x$ et si $V(\epsilon) < \infty$, $\epsilon(V) = x$. Soit maintenant $e = (e_s, s \geq 0)$ le processus des excursions hors de $\{x\}$ de X, à valeurs dans $\mathcal{E} \cup \{\mp\}$, où Υ est un point isolé, avec :

$$e_s = \begin{cases} (X_{\tau_{s-}+u}, 0 \leq u < \tau_s - \tau_{s-}) & \text{si } \tau_{s-} < \tau_s \\ \Upsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après un théorème d'Itô, $(e_s, s \geq 0)$ est un processus de Poisson ponctuel dont on note n_x sous $\mathbb{P}$ (et $n_x^{\updownarrow}$ sous $\mathbb{P}^{\updownarrow}$) la mesure caractéristique, appelée mesure d'excursion de X hors de $\{x\}$. De plus, $n(\cdot \mid V > \delta)$ est la loi sous $\mathbb{P}$ de la restriction de X à son premier intervalle d'excursion de durée de vie $V > \delta$ (et idem pour $\mathbb{P}^{\updownarrow}$).

À toute excursion générique issue de x on associe $m(\epsilon)$ son maximum (relatif) :

$$m(\epsilon) = \sup_{u \leq V(\epsilon)} (\epsilon_u - \epsilon_0) = \sup_{u \leq V(\epsilon)} \epsilon_u - x,$$

et pour tout $\eta > 0$, on note H_η, invariablement sous $\mathbb{P}_x^{\updownarrow}$ (resp. $\mathbb{P}_x$) ou sous $n_x^{\updownarrow}$ (resp. n_x), le premier temps d'atteinte de $x + \eta$.

Proposition 1.6 *On a la relation d'absolue continuité suivante : pour toute fonctionnelle mesurable positive F,*

$$n_x^{\updownarrow}(F(\epsilon)) = n_x(F(\epsilon) e^{\rho V} \mathbf{1}_{\{V<T\}}),$$

où T désigne toujours le premier temps de sortie de $(0, a)$.

Dém. Pour tout $\delta > 0$, on note g_δ et d_δ les bornes gauche et droite du premier intervalle d'excursion de longueur supérieure à δ :

$$d_\delta \doteq \inf\{u > \delta : \forall s > u - \delta \quad X_s \neq x, \text{ et } X_u = x\},$$

$$g_\delta \doteq \sup\{u < d_\delta : X_u = x\}.$$

On a par conséquent l'égalité :

$$\begin{aligned} n_x^{\updownarrow}(F(\epsilon) \mid V > \delta) &= \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(F(X_{t+g_\delta}; t \leq d_\delta - g_\delta)) \\ &= \mathbb{E}_x(F(X_{t+g_\delta}; t \leq d_\delta - g_\delta) \mathbf{1}_{\{d_\delta<T\}} \mathrm{e}^{\rho d_\delta}), \end{aligned}$$

car d_δ est un temps d'arrêt et $X_{d_\delta} = x$ p.s. On va appliquer maintenant la formule de compensation après avoir trouvé une écriture adéquate pour la quantité précédente. Celle-ci vaut encore :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x(\sum_{s>0} \mathrm{e}^{\rho\tau_{s-}} \mathrm{e}^{\rho V(e_s)} \mathbf{1}_{\{\tau_{s-}<T\}} \mathbf{1}_{\{\tau_{s-}<d_\delta\}} \mathbf{1}_{\{V(e_s)>\delta\}} F(e_s) \mathbf{1}_{\{e_s\in(0,a)\}}) \\ = \; & \mathbb{E}_x(\int_0^\infty ds \int n_x(d\epsilon) \mathrm{e}^{\rho\tau_s} \mathrm{e}^{\rho V(\epsilon)} \mathbf{1}_{\{\tau_s<T\}} \mathbf{1}_{\{\tau_s<d_\delta\}} \mathbf{1}_{\{V(\epsilon)>\delta\}} F(\epsilon) \mathbf{1}_{\{\epsilon\in(0,a)\}}) \\ = \; & c_x(\delta) n_x(F(\epsilon) \mathrm{e}^{\rho V(\epsilon)} \mathbf{1}_{\{V(\epsilon)>\delta\}} \mathbf{1}_{\{T>V(\epsilon)\}}), \end{aligned}$$

où

$$c_x(\delta) = \int_0^\infty ds\, \mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{\rho\tau_s}\mathbf{1}_{\{\tau_s<T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_s<d_\delta\}}).$$

Or le fait que $X_{\tau_s} = x$ p.s. assure par la formule exponentielle appliquée au processus ponctuel des excursions hors de $\{x\}$ sous $\mathbb{P}^\updownarrow$ que

$$\mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{\rho\tau_s}\mathbf{1}_{\{\tau_s<T\}}\mathbf{1}_{\{\tau_s<d_\delta\}}) = \mathbb{E}_x^\updownarrow(\mathbf{1}_{\{\tau_s<d_\delta\}}) = \exp(-sn_x^\updownarrow(V>\delta)),$$

d'où $c_x(\delta) = 1/n_x^\updownarrow(V>\delta)$, et pour tout $\delta > 0$,

$$n_x^\updownarrow(F(\cdot) \mid V>\delta)n_x^\updownarrow(V>\delta) = n_x(F(\cdot)\mathrm{e}^{\rho V}\mathbf{1}_{\{V<T\}}\mathbf{1}_{\{V>\delta\}}).$$

On a donc, sur l'espace des excursions de durée de vie supérieure à δ, l'égalité :

$$n_x^\updownarrow(F(\cdot)) = n_x(F(\cdot)\mathrm{e}^{\rho V}\mathbf{1}_{\{V<T\}}).$$

Mais δ est arbitrairement petit, aussi on a l'égalité sur l'espace $\mathcal{E}$ tout entier.

(Pour une démonstration alternative, voir [16]). □

1.5.2 Désintégration de l'excursion générique sous $n_x^\updownarrow$

On va maintenant donner une description assez précise de l'excursion générique hors de $\{x\}$ sous $\mathbb{P}^\updownarrow$ dans le cas *où le coefficient gaussien est nul*, c'est-à-dire quand le processus n'a pas de composante brownienne (prendre $b = 0$ dans la formule de Lévy-Khintchine (1.1)). On sait alors que X ne passe les niveaux inférieurs qu'en sautant au travers et qu'il existe donc pour l'excursion générique issue de x un unique instant j de saut à travers x, avant (resp. après) lequel l'excursion prend ses valeurs dans $[x,a)$ (resp. $(0,x]$).

Proposition 1.7 *On a la description suivante de l'excursion générique ϵ sous $n_x^\updownarrow$ décomposée en son instant j de saut à travers x :*

(i) $n_x^\updownarrow(j=\infty) = 0$ et $n_x^\updownarrow(\epsilon_{j-} = x) = 0$.

(ii) Pour tous $y \in (0,a), z \in (-y, x-y)$,

$$n_x^\updownarrow(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz) = \frac{W^{(-\rho)}(a-y)W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(a-x)W^{(-\rho)}(x)}e^{-\phi(0)y}dy\Lambda(dz)$$

(iii) Sous $n_x^\updownarrow(\cdot \mid \epsilon_{j-} = y, \Delta\epsilon_j = z)$, les processus pré-$j$ et post-j sont indépendants et :

•$(-\epsilon_{(j-u)-}; u \le j)$ a même loi que $(X_t; t \le T_{(a-x,\infty)})$ sous $I\!P_{a-y}^\updownarrow$,

•$(\epsilon_{j+u}; u \le V-j)$ a même loi que $(X_t; t \le T_{(x,\infty)})$ sous $I\!P_{y+z}^\updownarrow$.

Dém. Nous nous servons de résultats de [1] et [5], qui utilisent judicieusement la propriété de Markov forte et un résultat de L.C.G. Rogers ([21, p.25]) :

Sous l'hypothèse que le processus canonique sous $\mathbb{P}$ est un processus de Lévy sans sauts positifs et sans composante brownienne, la mesure d'excursion n associée au choix (1.9) du temps local en 0 peut être décrite en ces termes :
Si sous $\mathbb{P}$ X dérive vers $-\infty$ (resp. est récurrent, resp. dérive vers $+\infty$), alors

(i) $n(\epsilon_{j-} = 0 \mid j < \infty) = 0$ et $n(j = \infty) = 0$ (resp. id, resp. $n(j = \infty) = \psi'(0^+)$).

(ii) Pour tous $0 < y < -z$,

$$n(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz \mid j < \infty) = \mathrm{e}^{-\phi(0)y} dy \Lambda(dz)$$

(iii) Sous $n(\cdot \mid j < \infty, \epsilon_{j-} = y, \Delta\epsilon_j = z)$, les processus pré-$j$ et post-j sont indépendants et :

•$(-\epsilon_{(j-u)-}; u \leq j)$ a même loi que $(X_t; t \leq T_{(0,\infty)})$ sous $\mathbb{P}_{-y}(\cdot \mid T_{(0,\infty)} < \infty)$ (resp. sous $\mathbb{P}_{-y}$, resp. sous $\mathbb{P}_{-y}$),

•$(\epsilon_{j+u}; u \leq V - j)$ a même loi que $(X_t; t \leq T_{(0,\infty)})$ sous $\mathbb{P}_{y+z}$.

Nos assertions en découlent aisément :

(i) immédiat par la proposition 1.6 et la description précédente de n.

(ii) On applique successivement les deux arguments cités précédemment :

$$\begin{aligned} n_x^\updownarrow(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz) &= n_x(\mathbf{1}_{\{V<T\}} \mathrm{e}^{\rho V} \mathbf{1}_{\{\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz\}}) \\ &= n_x(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz) n_x(\mathbf{1}_{\{V<T\}} \mathrm{e}^{\rho V} \mid \epsilon_{j-} = y, \Delta\epsilon_j = z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n_x(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz) \mathbb{E}_{a-y}(\mathrm{e}^{\rho T_{a-x}} \mathbf{1}_{\{T_{a-x} < T_{(-\infty,0)}\}}) \mathbb{E}_{y+z}(\mathrm{e}^{\rho T_x} \mathbf{1}_{\{T_x < T_{(-\infty,0)}\}}) \\ &= n_x(\epsilon_{j-} \in dy, \Delta\epsilon_j \in dz) \frac{W^{(-\rho)}(a-y) W^{(-\rho)}(y+z)}{W^{(-\rho)}(a-x) W^{(-\rho)}(x)}. \end{aligned}$$

(iii) se montre grâce au lemme de dualité et à la propriété de Markov forte, ou alors à l'aide de la proposition 1.6. □

1.5.3 Expressions de quantités usuelles sous $n_x^\updownarrow$

On donne ici quelques précisions utiles sur $n_x^\updownarrow$, le temps local au niveau x étant fixé par (1.9). On rappelle que pour toute excursion ϵ hors de $\{x\}$, on désigne par $m(\epsilon)$ le maximum de $\epsilon - x$.

Notre proposition principale admet deux conséquences qui donnent chacune une expression usuelle, l'une de $n_x^\updownarrow(m > \eta)$, l'autre de l'exposant de Laplace de l'inverse du temps local sous $\mathbb{P}_x^\updownarrow$. On sait en effet que si τ_t désigne cet inverse, x étant fixé dans $(0, a)$, $(\tau_t, t \geq 0)$ est un subordinateur dont l'exposant de Laplace $\phi_x^\updownarrow$ est défini par :

$$\mathbb{E}_x^\updownarrow(\mathrm{e}^{-\lambda\tau_t}) = \exp(-t\phi_x^\updownarrow(\lambda)), \qquad \lambda \geq 0.$$

La proposition a d'autres applications, mentionnées à la fin de cette section.

Proposition 1.8 *Pour tout λ positif et tout $\eta \in [0, a-x]$,*

$$n_x^{\updownarrow}(1 - e^{-\lambda V}\mathbf{1}_{\{m<\eta\}}) = \frac{W^{(\lambda-\rho)}(x+\eta)}{W^{(\lambda-\rho)}(x)W^{(\lambda-\rho)}(\eta)}.$$

En particulier, on a pour tout λ positif,

$$\phi_x^{\updownarrow}(\lambda) = \frac{W^{(\lambda-\rho)}(a)}{W^{(\lambda-\rho)}(x)W^{(\lambda-\rho)}(a-x)},$$

et pour tout $\eta \in [0, a-x]$,

$$n_x^{\updownarrow}(m > \eta) = \frac{W^{(-\rho)}(x+\eta)}{W^{(-\rho)}(\eta)W^{(-\rho)}(x)}.$$

Dém. La dernière assertion est immédiate en prenant $\lambda = 0$.

Montrons l'identité suivante :

$$n_x^{\updownarrow}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda V}\mathbf{1}_{\{m<\eta\}}) = \left[\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^{T_{x+\eta}} \mathrm{e}^{-\lambda t} dL_t^x)\right]^{-1}. \tag{1.10}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^{T_{x+\eta}} \mathrm{e}^{-\lambda t} dL_t^x) &= \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^{\infty} ds\, \mathrm{e}^{-\lambda\tau_s}\mathbf{1}_{\{\tau_s < T_{x+\eta}\}}) \\
&= \int_0^\infty ds\, \mathbb{E}_x^{\updownarrow}\left(\exp(-\sum_{0\le u\le s} \lambda(\tau_u - \tau_{u-})\chi_{\{m(e_u)<\eta\}})\right),
\end{aligned}$$

$$\text{où} \qquad \chi_A(\omega) = \begin{cases} \infty & \text{si } \omega \in A^c \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

La quantité précédente vaut donc

$$\int_0^\infty ds\ \exp\left(-sn_x^{\updownarrow}(1 - \exp(-\lambda V\chi_{\{m<\eta\}}))\right) = \left[n_x^{\updownarrow}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda V}\mathbf{1}_{\{m<\eta\}})\right]^{-1}.$$

La deuxième assertion de la proposition se déduit de la première et de (1.10) en prenant $\eta = a - x$. Pour prouver la première assertion, nous nous servons du lemme suivant, dont la démonstration est donnée plus bas :

Lemme 1.9 *Pour tous $x, y \in (0, a)$, pour tout $\lambda > 0$, on a l'identité :*

$$\mathbb{E}_y^{\updownarrow}(\int_0^\infty e^{-\lambda t} dL_t^x) = u_\lambda^{\updownarrow}(y, x).$$

D'après le lemme, on peut écrire

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} dL_s^x \mid \mathcal{F}_t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} dL_s^x + \mathrm{e}^{-\lambda t} u_\lambda^{\updownarrow}(X_t, x),$$

ce qui, en appliquant le théorème d'arrêt en $T_{x+\eta}$, assure que

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\int_0^{T_{x+\eta}} \mathrm{e}^{-\lambda s} dL_s^x) = u_\lambda^{\updownarrow}(x,x) - u_\lambda^{\updownarrow}(x+\eta, x)\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda T_{x+\eta}}).$$

Le théorème 1.2 et la proposition 1.3(ii), joints avec l'expression (1.8) de la densité de la λ-résolvante $u_\lambda^{\updownarrow}(x,y)$ que l'on rappelle ici :

$$u_\lambda^{\updownarrow}(x,y) = \left(\frac{W^{(\lambda-\rho)}(x)W^{(\lambda-\rho)}(a-y)}{W^{(\lambda-\rho)}(a)} - \mathbf{1}_{\{x>y\}} W^{(\lambda-\rho)}(x-y)\right) \frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)},$$

fournissent le résultat de la proposition pour tout $\lambda > \rho$, puis par un argument de prolongement analytique, pour tout $\lambda \geq 0$.

Montrons maintenant le lemme et rappelons ([2, proposition V.2]), que si $\mathbf{e}$ est une v.a. indépendante de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$(2\varepsilon)^{-1} \int_0^{\mathbf{e}} \mathbf{1}_{\{|X_s - x| < \varepsilon\}} ds$$

converge vers $L_{\mathbf{e}}^x$ dans $L^2(\mathbb{P})$. En conséquence, pourvu que $\lambda > \rho$, alors cette même quantité converge vers $L_{\mathbf{e}}^x$ dans $L^2(\mathbb{P}^{\updownarrow})$. En particulier,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y^{\updownarrow}(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} dL_t^x) &= \mathbb{E}_y^{\updownarrow}(L_{\mathbf{e}}^x) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E}_y^{\updownarrow}(\int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{|X_t - x| < \varepsilon\}}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u_\lambda^{\updownarrow}(y,u) du \;=\; u_\lambda^{\updownarrow}(y,x),
\end{aligned}$$

car la continuité de $W^{(\lambda-\rho)}$ et la nullité de $W^{(\lambda-\rho)}(0)$ (dans le cas à variation infinie, qui nous occupe) assurent pour tout y la continuité de $u_\lambda^{\updownarrow}(y,\cdot)$ (voir l'expression de $u_\lambda^{\updownarrow}$, qui a déjà été redonnée plus haut). Pour voir que l'identité reste valable pour $\lambda \in (0,\rho]$, on peut par exemple se servir de l'équation résolvante. □

La proposition précédente nous permet de préciser le comportement asymptotique du temps local. Rappelons que d'après le théorème 1.2(iv), la probabilité stationnaire μ du processus confiné est absolument continue avec pour densité p.

Corollary 1.10 *Pour tout $x \in (0,a)$, on a p.s.*

$$\lim_{t\to\infty} L_t^x / t = p(x) = \frac{\mu(dx)}{dx}.$$

Dém. Il s'agit essentiellement d'une application du théorème ergodique (voir aussi la section XIX.46 dans [11]). Donnons une brève justification. On déduit de la proposition 1.8 que $\phi_x^\updownarrow$ admet une dérivée à droite en 0, qui vaut

$$\frac{c(a)}{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(a-x)} = p(x)^{-1}.$$

Donc grâce à

$$\mathbb{E}_x^\updownarrow(\tau_t) = tp(x)^{-1},$$

et $(\tau_t, t \geq 0)$ étant un processus de Lévy, la loi des grands nombres implique que p.s.

$$\lim_{t\to\infty} L_t^x/t = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\tau_t} = p(x),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Application. On peut également, grâce à l'expression de $n_x^\updownarrow(1 - \mathrm{e}^{-\lambda V}\mathbf{1}_{\{m<\eta\}})$, expliciter en fonction de ρ et des applications $W^{(q)}$, les transformées de Laplace de G_η, D_η, $T_{\{X_0-\eta\}}$, où

$$G_\eta \doteq \sup\{s < H_\eta : X_s = X_0\},$$
$$D_\eta \doteq \inf\{s > H_\eta : X_s = X_0\}.$$

Une judicieuse application de la théorie des excursions fournit en effet

$$\mathbb{E}_x^\updownarrow(\mathrm{e}^{-\lambda G_\eta}) = \frac{W^{(-\rho)}(x+\eta)}{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(\eta)} \frac{W^{(\lambda-\rho)}(\eta)W^{(\lambda-\rho)}(x)}{W^{(\lambda-\rho)}(x+\eta)}$$

$$\mathbb{E}_x^\updownarrow(\mathrm{e}^{-\lambda D_\eta}) = 1 - \frac{W^{(\lambda-\rho)}(\eta)W^{(\lambda-\rho)}(a)}{W^{(\lambda-\rho)}(x+\eta)W^{(\lambda-\rho)}(a-x)}$$

$$\mathbb{E}_{x+\eta}^\updownarrow(\mathrm{e}^{-\lambda T_{\{x\}}}) = \left(1 - \frac{W^{(\lambda-\rho)}(\eta)W^{(\lambda-\rho)}(a)}{W^{(\lambda-\rho)}(x+\eta)W^{(\lambda-\rho)}(a-x)}\right) \frac{W^{(\lambda-\rho)}(x+\eta)W^{(-\rho)}(x)}{W^{(\lambda-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(x+\eta)}$$

1.6 Vitesse de croissance du suprémum

Nous ferons dans toute cette section l'hypothèse suivante : soit les trajectoires de X sont à variation infinie, soit la mesure de Lévy Λ de X sous $\mathbb{P}$ n'a pas d'atomes.

1.6.1 Introduction

On désigne par S_t (resp. I_t)= sup (resp. inf)$\{X_s; s \in [0,t]\}$ le suprémum local (resp. l'infimum local). La récurrence du processus confiné assure que S_t converge p.s. vers a et que I_t converge p.s. vers 0 quand $t \to \infty$.

En fait, on peut ramener l'étude de l'infimum à celle du suprémum. En effet, si l'on désigne pour toute excursion ϵ hors de $\{a/2\}$ par $S(\epsilon)$ sa borne supérieure et par

$I(\epsilon)$ sa borne inférieure, alors le lemme de dualité affirme que $a - S(\epsilon)$ et $I(\epsilon)$ ont même loi. Si maintenant τ^* désigne l'inverse du temps local au niveau $a/2$, alors comme $a - S_{\tau_t^*} = \min\{a - S(e_s); s \leq t\}$ et $I_{\tau_t^*} = \min\{I(e_s); s \leq t\}$, ces deux processus sont par conséquent identiquement distribués. On verra grâce au corollaire 1.10 qu'alors I_t et $a - S_t$ ont le même comportement asymptotique.

Plus formellement, notre but est de mettre en évidence une fonction (ou une classe de fonctions) déterministe dont le comportement à l'infini approche celui de $a - S_t$: on travaille sous $\mathbb{P}_x^\updownarrow$ et l'on suppose que f désigne une fonction décroissante à l'infini de $[0, \infty) \to (0, \infty)$ telle que $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$.

On définit alors les deux réels l_f et L_f par

$$\begin{aligned} l_f &= \varliminf_{t\to\infty} \frac{a - S_t}{f(t)}, \\ L_f &= \varlimsup_{t\to\infty} \frac{a - S_t}{f(t)}. \end{aligned}$$

De plus, le comportement asymptotique de S_t au voisinage de l'infini étant comme nous le verrons en relation étroite avec celui de $W^{(-\rho)}$ au voisinage de a^-, nous donnons à ce sujet un résultat qui sera démontré dans la dernière section de cette partie :

Proposition 1.11 *La fonction de deux variables $(x, q) \mapsto W^{(q)}(x)$ est de classe C^1 sur $(0, \infty) \times (-\infty, \infty)$. De plus, si l'on rappelle que $\rho(x) = \inf\{q > 0 : W^{(-q)}(x) = 0\}$, l'application $x \mapsto \rho(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sa dérivée est non nulle sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}_+^\star$ partout dense, tel que :*

$$a \in \mathcal{D} \Rightarrow x \mapsto W^{(-\rho)}(x) \;\; \textit{admet une dérivée en } a \textit{ strictement négative.}$$

Dans le cas stable d'indice $\alpha \in (1, 2]$, l'ouvert dense $\mathcal{D}$ est $\mathbb{R}_+^\star$ tout entier.

1.6.2 Un résultat en loi

Énonçons directement le

Théorème 1.12 *Si $a \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire si $\rho'(a) \neq 0$, alors les réels $t(a - S_t)$ convergent en loi quand $t \to \infty$ vers une v.a. exponentielle de paramètre $|\rho'(a)|$.*

Dém. Nous allons nous placer dans le cadre de la décomposition des trajectoires en leurs excursions hors de $\{x\}$, exposé dans la partie précédente, et nous appuyer sur l'observation élémentaire suivante : $S_{\tau_t} - x$ est la borne supérieure des hauteurs des excursions $(e_s, s \leq t)$.

De plus, les hauteurs trop petites n'apportant aucune contribution au processus des suprema $(S_t, t \geq 0)$, on tronque par commodité la 'loi' de cette hauteur de manière à obtenir une vraie loi de probabilité, la continuité de $W^{(-\rho)}$ assurant qu'il existe un réel $\alpha(x) \in (0, a - x)$ tel que $n_x^\updownarrow(m > \alpha(x)) = 1$.

On sait d'autre part que si $(Z_s, s \geq 0)$ est défini par

$$Z_s = \begin{cases} a - m(e_s) - x & \text{si } \tau_{s-} < \tau_s \text{ et } m(e_s) > \alpha(x) \\ \Upsilon & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors Z est un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique

$$n_x^{\updownarrow}(a - m - x \in \cdot \mid m > \alpha)$$

(car $n_x^{\updownarrow}(m > \alpha) = 1$), qui est une loi de probabilité de fonction de répartition R_x donnée par

$$R_x(u) = \frac{W^{(-\rho)}(a-u)}{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(a-u-x)}, \qquad u \in (0, a - x - \alpha(x)).$$

Or d'après la proposition 1.11, la fonction R_x est de classe C^1 et de dérivée strictement positive sur un intervalle de type $[0, \delta)$ (hypothèse $a \in \mathcal{D}$), donc R_x est strictement croissante sur cet intervalle. Par conséquent, comme

$$a - S_{\tau_t} = \min\{Z_s; s \leq t\},$$

alors à partir d'un certain rang, $a - S_{\tau_t}$ est le minimum de N v.a. i.i.d. de fonction de répartition R_x, indépendantes de N, où N suit une loi de Poisson de paramètre t. Il suffira donc d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 1.13 *Soient $y \in (0, \infty]$ et $R : [0, y) \to [0, \infty)$ une fonction croissante. Considérons un processus de Poisson ponctuel $(Z_s, s \geq 0)$ sur $[0, y)$ de mesure caractéristique dR. Pour tout $t > 0$, soit $i_t = \inf_{0 \leq s \leq t} Z_s$, avec la convention $\inf \emptyset = y$. Alors*

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda i_t}) = 1 - \lambda \int_0^y du\, e^{-\lambda u} e^{-tR(u)}, \qquad \lambda > 0.$$

Dém. L'égalité suivante

$$\mathbb{P}(Z_s > x \text{ for all } s \in [0, t]) = \exp(-tR(x)), \qquad x \in (0, y)$$

rend la démonstration immédiate. □

En conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda t(a - S_{\tau_t})}) &= 1 - \lambda t \int_0^y du\, \mathrm{e}^{-\lambda t u} \mathrm{e}^{-tR_x(u)} \\ &= 1 - \lambda \int_0^{ty} dv\, \mathrm{e}^{-\lambda v} \mathrm{e}^{-tR_x(v/t)}, \end{aligned}$$

donc par convergence dominée,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda t(a - S_{\tau_t})}) &= 1 - \lambda \int_0^{\infty} dv\, \mathrm{e}^{-\lambda v} \mathrm{e}^{-R_x'(0)v} \\ &= \frac{R_x'(0)}{\lambda + R_x'(0)}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\delta < p(x)$, alors $\tau_{\delta t} < t$ pour t assez grand d'après le corollaire 1.10, donc

$$\begin{aligned} \varliminf_{t\to\infty} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda t(a-S_t)}) &\geq \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda\delta^{-1}t(a-S_{\tau_t})}) \\ &\geq \frac{R_x{}'(0)}{\lambda\delta^{-1}+R_x{}'(0)}. \end{aligned}$$

Donc en faisant tendre δ vers $p(x)$, on obtient que

$$\varliminf_{t\to\infty} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda t(a-S_t)}) \geq \frac{p(x)R_x{}'(0)}{\lambda+p(x)R_x{}'(0)}.$$

De plus, si l'on se réfère à la démonstration de la proposition 1.11, on voit que $\rho'(a) = \frac{\partial}{\partial x}W^{(-\rho)}(a)/\frac{\partial}{\partial q}W^{(-\rho)}(a)$, et l'on a l'expression suivante pour $R'_x(0)$:

$$R'_x(0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}W^{(-\rho)}(a)}{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(a-x)} = -\frac{\rho'(a)}{p(x)} = \frac{|\rho'(a)|}{p(x)},$$

donc si l'on procède de la même façon avec $\delta > p(x)$, on trouve

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^{\updownarrow}(\mathrm{e}^{-\lambda t(a-S_t)}) = \frac{|\rho'(a)|}{\lambda+|\rho'(a)|},$$

ce qui complète la démonstration. □

1.6.3 Un résultat p.s. pour l_f

On énonce un premier résultat, où l'abréviation 'i.s.' signifie 'infiniment souvent' :

Théorème 1.14 *Selon que $\int^\infty W^{(-\rho)}(a-f(s))ds$ converge ou diverge,*

$$\mathbb{P}_x^{\updownarrow}(a-S_t < f(t) \textit{ i.s. quand } t\to\infty) = 0 \textit{ ou } 1.$$

En particulier,

$$\int^\infty f(s)ds \textit{ converge} \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{a-S_t}{f(t)} = +\infty \quad p.s.$$

Dém. Montrons la deuxième assertion : d'après la proposition 1.11, $W^{(-\rho)}$ est de classe C^1, donc si $\int^\infty f(s)ds$ converge, alors $\int^\infty W^{(-\rho)}(a-f(s))ds$ converge. En remplaçant f par λf, puis en faisant tendre λ vers l'infini, on obtient le résultat.

Revenons à la première assertion. Soit l'entier N_t défini par

$$N_t = \sum_{s\leq t} \mathbf{1}_{\{m(e_s)>a-f(s)-x\}},$$

v.a. qui compte le nombre de fois entre 0 et τ_t, où le maximum absolu d'une excursion est supérieur à $a - f(L)$ (m = maximum absolu$-x$). Si l'on applique les théorèmes classiques d'Itô sur le processus des excursions, on voit que N_t est une variable de Poisson de paramètre

$$\int_0^t n_x^{\updownarrow}(m > a - f(s) - x)ds,$$

et l'on se rappelle que

$$n_x^{\updownarrow}(m > a - f(s) - x) = \frac{W^{(-\rho)}(a - f(s))}{W^{(-\rho)}(a - f(s) - x)W^{(-\rho)}(x)}.$$

En conséquence, N_∞ est p.s. fini ou p.s. infini, autrement dit $S_{\tau_t} > a - f(t)$ i.s. quand $t \to \infty$ avec probabilité 0 ou 1, suivant que $\int^\infty W^{(-\rho)}(a - f(s))ds$ converge ou diverge.

Pour changer de temps et nous ramener à S_t, rappelons le résultat du corollaire 1.10 : il existe une constante $p(x)$ dépendant de x telle que p.s.,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L_t^x}{t} = p(x).$$

Observant maintenant que le critère intégral du théorème n'est pas modifié quand on remplace f par $t \mapsto f(\lambda t)$, où λ est un réel positif quelconque, on en déduit facilement que les événements $\{S_t > a - f(t)$ i.s. quand $t \to \infty\}$ et $\{S_{\tau_t} > a - f(t)$ i.s. quand $t \to \infty\}$ ont même probabilité. □

Remarque. Depuis le début de cette section, nous supposons implicitement que les trajectoires sont à variation infinie. En fait, tout ce qui a été dit s'applique au cas à variation finie, ainsi que ce qui va suivre, si l'on fait attention à la modification suivante :

$$n_x^{\updownarrow}(m > \eta) = \mathbb{P}_x^{\updownarrow}(T_{x+\eta} < T_{(0,x)}) = W(0)\frac{W^{(-\rho)}(x + \eta)}{W^{(-\rho)}(x)W^{(-\rho)}(\eta)}.$$

Nous déduisons du théorème précédent et de la proposition 1.11, un corollaire plus explicite, dont la démonstration consiste à remplacer f dans le critère intégral par $t \mapsto \lambda f(t)$, λ étant tour à tour arbitrairement petit ou grand. On rappelle que $\mathcal{D}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}_+^\star$ défini dans l'introduction de cette section.

Corollary 1.15 *Supposons que $a \in \mathcal{D}$. Alors selon que $\int^\infty f(s)ds$ converge ou diverge,*

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{a - S_t}{f(t)} = \infty \quad p.s. \qquad ou \qquad 0 \quad p.s.$$

1.6.4 Un résultat p.s. pour L_f

Dans le cas où $\int^\infty f(s)ds$ converge, nous savons donc déjà que $\lim_{t\to\infty}(a - S_t)/f(t) = +\infty$ p.s. Concentrons-nous par conséquent sur le cas où $\int^\infty f(s)ds$ diverge, et supposons de plus que $t \mapsto g(t) = tf(t)$ est croissante à l'infini et à variation lente à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(\lambda t)}{g(t)} = 1.$$

Rappelons que $x \mapsto \rho(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Théorème 1.16 *Supposons que $a \in \mathcal{D}$: on sait alors que la dérivée de $x \mapsto \rho(x)$ en a est strictement négative. Soit*

$$\Gamma_f \doteq \inf\{\gamma \geq 0 : \int^\infty dt f(t) e^{-\gamma t f(t)} < \infty\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. *Alors*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{a - S_t}{f(t)} = \frac{\Gamma_f}{|\rho'(a)|} \qquad p.s.$$

Remarque 1. Avec la notation

$$I_f(\gamma) \doteq \int^\infty dt f(t) \mathrm{e}^{-\gamma t f(t)},$$

on voit facilement que sur (Γ_f, ∞), I_f est finie (et décroît), et que si $\Gamma_f > 0$, elle vaut identiquement $+\infty$ sur $[0, \Gamma_f)$. Cette remarque est utilisée implicitement dans la démonstration.

Remarque 2. Donnons une idée de ce que vaut Γ_f. Si $\log_k$ désigne l'itérée k fois du logarithme népérien, alors pour

$$\begin{array}{lcl} f(t) = t^{-1} \log_3 t & , & \Gamma_f = \infty, \\ f(t) = t^{-1} \log_2 t & , & \Gamma_f = 1, \\ f(t) = t^{-1} \log t & , & \Gamma_f = 0. \end{array}$$

En particulier, on voit que l'hypothèse de variation lente n'est pas restrictive, puisqu'en faisant le choix $tf(t) = \log t$, cette fonction varie déjà trop rapidement ($\Gamma_f = 0$).

De plus, grâce aux résultats de la sous-section précédente, on observe que si $f(t) = t^{-1} \log_2 t$, alors

$$l_f = 0 \qquad \text{et} \qquad L_f = \frac{1}{|\rho'(a)|} \qquad \text{p.s.},$$

tandis que si $f(t) = t^{-1}$, ou $f(t) = t^{-1} \log_k t$, avec $k \geq 3$,

$$l_f = 0 \qquad \text{et} \qquad L_f = \infty \qquad \text{p.s.}$$

Rappelons que pour $\alpha \in (1, 2]$, $-r(\alpha)$ désigne toujours la première racine négative de E'_α, où E_α est la fonction de Mittag-Leffler de paramètre α donnée par (1.7), et faisons la

Remarque 3. Dans le cas stable d'indice $\alpha \in (1,2]$, quel que soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t(a-S_t)}{\log_2 t} = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha r(\alpha)} \qquad \text{p.s.},$$

ce qui devient pour le brownien

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{t(a-S_t)}{\log_2 t} = \frac{a^3}{\pi^2} \qquad \text{p.s.}$$

Dém. Les remarques sont des applications directes du théorème, l'affirmation dans le cas stable consistant simplement à dériver $a \mapsto \rho(a) = r(\alpha)a^{-\alpha}$.

Montrons maintenant le théorème en considérant à nouveau le processus de Poisson ponctuel Z défini dans la section concernant un résultat en loi. Rappelons que la fonction R_x est de classe C^1 de dérivée strictement positive sur un intervalle de type $[0,\delta)$. Par conséquent comme $a - S_{\tau_t} = \min\{Z_s; s \le t\}$, la trajectoire du processus $(R_x(a-S_{\tau_t}), t \ge 0)$, coïncide pour t assez grand avec celle de $(v_t, t \ge 0)$, où v_t a même loi que le minimum sur $[0,t]$ d'un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique la loi uniforme sur $(0,1)$. On peut donc appliquer le théorème 3 de [20] où est défini un processus u dit extrémal, qui issu de u_0 a même loi que $(u_0 \wedge v_t, t \ge 0)$, ainsi : f étant décroissante à l'infini et $t \mapsto tf(t)$ étant croissante à l'infini, ce théorème assure que $u_t > f(t)$ i.s. quand $t \to \infty$ avec probabilité 0 ou 1 selon que $\int^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tf(t)}dt$ converge ou diverge. En conséquence, si par exemple cette intégrale, que l'on a appelée $I_f(1)$, diverge, alors

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R_x(a-S_{\tau_t})}{f(t)} \ge 1 \qquad \text{p.s.}$$

Soit alors $\lambda > 1$, et changeons de temps :

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R_x(a-S_{\tau_t})}{f(t)} &= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R_x'(0)(a-S_{\tau_t})}{f(t)} \\
&= \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R_x'(0)(a-S_{\tau(\lambda p(x)t)})}{f(\lambda p(x)t)} \\
&\le \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{R_x'(0)(a-S_t)}{f(\lambda p(x)t)} \\
&= \overline{\lim_{t\to\infty}} \lambda p(x) R_x'(0) \frac{a-S_t}{f(t)},
\end{aligned}$$

où l'inégalité est due au corollaire 1.10 et la dernière égalité à la variation lente de $t \mapsto tf(t)$. Rappelant l'expression suivante pour $R_x'(0)$:

$$R_x'(0) = \frac{|\rho'(a)|}{p(x)},$$

et faisant tendre λ vers 1, on obtient que $L_f \ge |\rho'(a)|^{-1}$ p.s.

Dans le cas où $I_f(1)$ converge, on montre de la même manière l'inégalité contraire.

Pour avoir le résultat requis, choisissons un réel $\lambda > \Gamma_f$ ($\Gamma_f < \infty$). On peut alors appliquer le résultat précédent à λf : $I_{\lambda f}(1)$ converge, donc $L_f = \lambda L_{\lambda f}$ est majoré p.s. par $\lambda\, |\rho'(a)|^{-1}$, et en faisant tendre λ vers Γ_f, on obtient

$$L_f \leq \frac{\Gamma_f}{|\rho'(a)|} \qquad \text{p.s.},$$

ce qui est évidemment vrai pour $\Gamma_f = \infty$.

Avec $\lambda < \Gamma_f$ ($\Gamma_f > 0$), on montre l'inégalité contraire, ce qui fournit :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{a - S_t}{f(t)} = \frac{\Gamma_f}{|\rho'(a)|} \qquad \text{p.s.},$$

et la démonstration s'achève ainsi. □

1.6.5 Preuve de la Proposition 1.11

Commençons par montrer que $W = W^{(0)}$ est de classe C^1 sur $(0, \infty)$: On se ramène à la description de base de W, p.195 de [2] :

$$W(x) = K \exp\left(-\int_x^\infty \nu(t, \infty)dt\right),$$

où K est une constante positive, et ν la mesure caractéristique du processus de Poisson ponctuel des hauteurs d'excursion de $S - X$ hors de $\{0\}$ sous $\mathbb{P}_0$. En particulier, W est dérivable de dérivée

$$W'(x) = W(x)\nu(x, \infty).$$

Comme $x \mapsto \nu(x, \infty)$ décroît, il suffit, pour montrer que W est C^1 sur $(0, \infty)$, de prouver que $x \mapsto \nu(x, \infty)$ n'a pas de discontinuité de première espèce, autrement dit que pour tout $x > 0$, $\nu(\{x\}) = 0$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\nu(\{x\}) > 0$ pour un certain $x > 0$, c'est-à-dire $\tilde{n}(m = x) > 0$, où $\tilde{n}$ désigne la mesure caractéristique du processus ponctuel des excursions de $S - X$ hors de $\{0\}$ sous $\mathbb{P}_0$. Rappelons que dans le cas à variation infinie, x est régulier pour $(-\infty, x)$ sous $\mathbb{P}$, et appliquons la propriété de Markov forte au temps d'arrêt T_x sous la probabilité conditionnelle $\tilde{n}(\cdot \mid m = x)$ ($\{0 \leq T_x < V\}$ est de $\tilde{n}(\cdot \mid m = x)$-mesure pleine puisque $S - X$ n'a pas de sauts négatifs). Le fait que l'excursion visite (x, ∞) p.s. immédiatement après T_x amène la contradiction.

Dans le cas à variation finie intervient l'hypothèse que la mesure de Lévy Λ de X sous $\mathbb{P}$ n'a pas d'atomes : elle implique que $\tilde{n}(\epsilon(0) \in \cdot)$ n'a pas d'atomes et par conséquent $\{0 < \epsilon(0) < x\}$ est de $\tilde{n}(\cdot \mid m = x)$-mesure pleine, donc $0 < T_{[x,\infty)} < V$. Mais comme les trajectoires sont à variation finie, le dual $-X$ ne peut pas ramper, c'est-à-dire ne peut pas passer les niveaux supérieurs sans sauter au travers : $\tilde{n}(\epsilon(T_{[x,\infty)}) = x) = 0$, d'où la contradiction.

Montrons maintenant que $(x,q) \mapsto W^{(q)}(x)$ est C^1 sur $(0,\infty) \times (-\infty,\infty)$. Il suffit de montrer que $(x,q) \mapsto W^{(q)}(x)$ admet des dérivées partielles conjointement continues en q et en x. Pour cela, nous allons utiliser l'écriture de $W^{(q)}$ sous forme de série entière et prouver la convergence uniforme des dérivées partielles des séries partielles. En ce qui concerne la dérivée par rapport à q, son existence et sa continuité découlent de l'écriture de $q \mapsto W^{(q)}(x)$ sous forme de série entière (1.4), et de la majoration (1.5), ainsi que de la continuité de la fonction d'échelle.

Passons à $x \mapsto W^{(q)}(x)$: d'après les paragraphes précédents, $W^{\star k+1}$ est C^1 sur $(0,\infty)$, de plus sa dérivée est positive et vaut :

$$\begin{aligned}(W^{\star k+1})'(x) &= W' \star W^{\star k}(x) + W(0)W^{\star k}(x) \\ &\leq \int_0^x dy W'(x-y)\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}W(y)^k + \frac{x^k}{k!}W(x)^{k+1}W(0),\end{aligned}$$

par la croissance de la fonction d'échelle,

$$\begin{aligned}&\leq \frac{W(x)^k}{(k-1)!}\left([-W(x-y)y^{k-1}]_0^x + (k-1)\int_0^x W(x-y)y^{k-2}dy\right) + \frac{x^k}{k!}W(x)^{k+1}W(0) \\ &\leq \frac{W(x)^k}{(k-1)!}\left(x^{k-1}W(0) + x^{k-1}W(x) + \frac{x^k}{k}W(x)W(0)\right).\end{aligned}$$

Or ce trinôme (que l'on aura préalablement multiplié par q^k) est le terme général d'une série uniformément convergente sur tout compact de $(0,\infty) \times (-\infty,\infty)$, donc $W^{(q)}$ est C^1 sur $(0,\infty)$ de dérivée conjointement continue en q et en x

$$W^{(q)\prime}(x) = \sum_{k\geq 0} q^k (W^{\star k+1})'(x).$$

Nous montrons la deuxième assertion de la proposition : revenons à l'application $x \mapsto \rho(x)$ quand x varie. On montre facilement que ρ décroît strictement car on sait que pour $h > 0$ et $q \leq \rho(a+h)$,$W^{(-q)}$ est strictement positif sur $(0, a+h)$, donc sur $(0,a)$, par conséquent $\rho(a) > \rho(a+h)$.

De plus, la continuité de $(x,q) \mapsto W^{(q)}(x)$ et la définition de $\rho(a)$ assurent la continuité à droite de ρ. Précisément, $W^{(-\rho(a+))}(a) = 0$ par $W^{(-\rho(a+\varepsilon))}(a+\varepsilon) = 0$, $(\varepsilon > 0)$, et l'on conclut grâce à $\rho(a+) \leq \rho(a)$.

Pour avoir la continuité à gauche, raisonnons par l'absurde : pour tout $q \in [\rho(a), \rho(a-)]$, la définition de $\rho(a-\varepsilon)$ entraîne que $W^{(-q)}(a-\varepsilon) > 0$, $(\varepsilon > 0)$, donc $W^{(-q)}(a) \geq 0$. De plus, on sait que pour tout $q' < \rho(a)$, la définition de $\rho(a)$ entraîne que $W^{(-q')}(a) > 0$. Donc dans un voisinage de $\rho(a), q \mapsto W^{(-q)}(a)$ est positive, ce qui contredit le résultat selon lequel $\rho(a)$ est une racine simple de $q \mapsto W^{(-q)}(a)$ (cf théorème 1.1).

En définitive, on sait de $a \mapsto \rho(a)$ qu'elle est continue, strictement décroissante, et vérifie

$$W^{(-\rho(a))}(a) = 0.$$

Comme d'après la première partie de la démonstration, $(x,q) \mapsto W^{(q)}(x)$ est C^1 sur $(0,\infty) \times (-\infty,\infty)$, et que sa dérivée partielle par rapport à q au point $(-\rho(a),a)$ est strictement positive, on peut lui appliquer le théorème des fonctions implicites en ce point : par unicité locale de la fonction implicite, il vient que ρ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que sa dérivée vaut :

$$\rho'(a) = \frac{\partial}{\partial x} W^{(-\rho(a))}(a) / \frac{\partial}{\partial q} W^{(-\rho(a))}(a).$$

En particulier, dès que la dérivée de ρ en a est strictement négative, celle de $x \mapsto W^{(-\rho)}(x)$ en a est aussi strictement négative. Comme $a \mapsto \rho(a)$ est strictement décroissante, alors le fait qu'elle soit de classe C^1 garantit que l'ensemble $\mathcal{D}$ où sa dérivée est non nulle est un ouvert de $\mathbb{R}_+^\star$, tel que $\bar{\mathcal{D}} = \mathbb{R}_+$.

Dans le cas stable d'indice $\alpha \in (1,2]$, on rappelle que $\rho(x) = \text{cte}.x^{-\alpha}$, par conséquent la dérivée de $x \mapsto \rho(x)$ ne s'annule jamais : on voit que pour tout $\alpha \in (1,2]$ et tout stable complètement asymétrique d'indice α, l'ensemble $\mathcal{D}$ est $\mathbb{R}_+^\star$ tout entier. $\square$

1.7 Construction de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$ à partir de $\mathbb{P}^{\uparrow}$

Ici nous allons travailler avec le processus conditionné à rester positif. Notre but est de montrer que conditionner ce processus à rester indéfiniment majoré par a (en un certain sens similaire à celui que nous avons exposé dans la section précédente), conduit à la mesure de probabilité $\mathbb{P}^{\updownarrow}$. Rappelons quelques propriétés de la loi $\mathbb{P}^{\uparrow}$ du processus de Lévy conditionné à rester positif, dont on trouvera les démonstrations dans [2] aux pages 198 à 206 :

Le processus $\mathbf{1}_{\{t<T_{(-\infty,0)}\}} W(X_t)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$ et la nouvelle mesure de probabilité définie par :

$$d\mathbb{P}^{\uparrow}_{x|\mathcal{F}_t} = \mathbf{1}_{\{t<T_{(-\infty,0)}\}} \frac{W(X_t)}{W(x)} d\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

a les propriétés suivantes :

- Sous $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$, X est un processus de Markov homogène positif qui dérive vers $+\infty$;
- $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$ est la limite des lois conditionnelles $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T_y < T_{(-\infty,0)})$ quand $y \to \infty$;
- les mesures de probabilité $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$ convergent lorsque $x \to 0^+$ au sens de la convergence faible. La limite est désignée par $\mathbb{P}^{\uparrow}_0 = \mathbb{P}^{\uparrow}$ et le processus canonique X est un processus de Feller pour la famille $(\mathbb{P}^{\uparrow}_x, x \geq 0)$.

Nous allons maintenant montrer qu'en fait, conditionner $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$ par $\{T = \infty\}$ (c'est-à-dire par $\{T_a = \infty\}$) revient à conditionner $\mathbb{P}_x$ par $\{T = \infty\}$, puis nous allons calculer la limite de $\mathbb{P}^{\updownarrow}_x$ lorsque $x \to 0^+$:

Proposition 1.17 *Au sens de la convergence faible, $\mathbb{P}^{\updownarrow}_x$ est la limite des mesures de probabilité $\mathbb{P}^{\uparrow}_x(\cdot \mid T_a > t)$ quand $t \to \infty$.*

Dém. Avec la notation $P^{\uparrow t}(x,A) = \mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_t \in A, t < T_{[a,+\infty)})$,

$$P^{\uparrow t}(x,dy) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{X_t \in dy\}}\mathbf{1}_{\{T>t\}}\frac{W(y)}{W(x)}) = \frac{W(y)}{W(x)}P^t(x,dy).$$

Le même cheminement que celui suivi pour $\mathbb{P}$ peut alors être retracé pour $\mathbb{P}^{\uparrow}$, en particulier,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\mathbb{P}_y^{\uparrow}(T>s)}{\mathbb{P}_x^{\uparrow}(T>t+s)} = \mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(y)}{W^{(-\rho)}(x)}\frac{W(x)}{W(y)},$$

et de la même manière, grâce au lemme de Scheffe, pour $Y \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\mathbb{E}_x^{\uparrow}(Y \mid T>t+s) &= \mathbb{E}_x^{\uparrow}(Y\mathbf{1}_{\{T>t\}}\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W(X_t)}\frac{W(x)}{W^{(-\rho)}(x)})\\ &= \mathbb{E}_x(Y\mathbf{1}_{\{T>t\}}\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W^{(-\rho)}(x)})\\ &= \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(Y),\end{aligned}$$

et la preuve s'achève ainsi. □

Notamment, afin de trouver la loi d'entrée en 0 de $\mathbb{P}^{\updownarrow}$, on peut écrire que pour tout $Y \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$:

$$\mathbb{E}_x^{\updownarrow}(Y) = \mathbb{E}_x^{\uparrow}(Y\mathbf{1}_{\{T>t\}}\mathrm{e}^{\rho t}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W(X_t)}\frac{W(x)}{W^{(-\rho)}(x)}),$$

et chercher la limite quand $x \to 0^+$ du quotient $W(x)/W^{(-\rho)}(x)$. Pour cela, on utilise l'égalité (1.4) et l'inégalité (1.5). Quand x est au voisinage positif de 0,

$$\begin{aligned}|W^{(q)}(x) - W(x)| &\leq \sum_{k\geq 1}|q|^k\frac{x^k}{k!}W(x)^{k+1}\\ &\leq W(x)(\mathrm{e}^{|q|xW(x)}-1)\\ &\sim W(x)^2|q|x.\end{aligned}$$

Et donc pour tout $q \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{W^{(q)}(x)}{W(x)} = 1.$$

Nous pouvons énoncer puis démontrer la

Proposition 1.18 *Les mesures de probabilité $\mathbb{P}_x^{\updownarrow}$ convergent lorsque $x \to 0^+$ au sens de la convergence faible, vers une mesure de probabilité notée $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$:*

$$\forall Y \in L^\infty(\mathcal{F}_t), \qquad \mathbb{E}_0^{\updownarrow}(Y) = \mathbb{E}_0^{\uparrow}(Y\,e^{\rho t}\mathbf{1}_{\{t<T_a\}}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W(X_t)}).$$

Le processus canonique est un processus de Feller pour la famille $(\mathbb{P}_x^{\updownarrow}, x \in [0,a))$.

Dém. Il s'agit de s'accomoder du fait que $\omega \mapsto \mathbf{1}_{\{t<T_a(\omega)\}}$ n'est pas continue pour la topologie de Skorohod, et donc de procéder par approximations.

Soient $\varepsilon, t > 0$. On définit la fonction $\chi_{t,\varepsilon}$ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\chi_{t,\varepsilon}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [0,t] \\ (u-t)/\varepsilon & \text{si } u \in (t, t+\varepsilon) \\ 1 & \text{si } u \in [t+\varepsilon, \infty) \end{cases}$$

Remarquons que $\chi_{t,\varepsilon}$ est continue et que $\chi_{t,\varepsilon}(u)$ converge pour tout u en croissant, quand $\varepsilon \to 0$, vers $\mathbf{1}_{\{t<u\}}$. On note alors $\Theta_{t,\varepsilon}$ la fonctionnelle définie pour tout $\omega \in \Omega$ issu de $\omega(0) \in (0,a)$ par :

$$\Theta_{t,\varepsilon}(\omega) = \chi_{t,\varepsilon}(T(\omega)) = \chi_{t,\varepsilon}(\inf\{s \geq 0 : \omega(s) \notin (0,a)\}).$$

Comme $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$-p.s., $T = T_{[a,\infty)} = T_{(a,\infty)}$ et $\Delta X_t = 0$, on peut facilement montrer que $\omega \mapsto \omega(t)$ et $\omega \mapsto T(\omega)$ sont continues hors d'un événement de $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$-mesure nulle pour la topologie de Skorohod.

Soit maintenant F une fonctionnelle quelconque continue et bornée définie sur $\mathcal{D}([0,t],\mathbb{R})$, que l'on suppose positive, quitte à la décomposer en ses parties positive et négative.

À tout $\omega \in \Omega$ issu de x, on associe les réels

$$G_{t,0}^0(\omega) \doteq F(\omega(s); s \leq t)\frac{W^{(-\rho)}(\omega_t)}{W(\omega_t)}\mathrm{e}^{\rho t}\mathbf{1}_{\{T>t\}},$$

$$G_{t,\varepsilon}^x(\omega) \doteq G_{t,0}^0(\omega)\frac{W(x)}{W^{(-\rho)}(x)}\Theta_{t,\varepsilon}(\omega).$$

D'après la remarque précédant l'énoncé de la proposition, $G_{t,\varepsilon}^x(\omega)$ est uniformément bornée en $(x,\omega) \in (0,a/2)\times\Omega$, et est continue $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$-p.s. grâce à la continuité de $\omega \mapsto \omega(t)$, $\omega \mapsto T(\omega)$, $\omega \mapsto F(\omega)$, et celle de W, $W^{(-\rho)}$, et $\chi_{t,\varepsilon}$.

Soit un réel $\eta > 0$. Nous écrivons $\mathbb{E}_0^{\updownarrow}(F(X)) - \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(F(X)) = \mathbb{E}_0^{\uparrow}(G_{t,0}^0(X)) - \mathbb{E}_x^{\uparrow}(G_{t,0}^x(X))$ comme somme de trois termes dont nous majorons tour à tour la valeur absolue par $\eta/3$.

(i) par convergence monotone, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \qquad |\, \mathbb{E}_0^{\uparrow}(G_{t,\varepsilon}^0(X)) - \mathbb{E}_0^{\uparrow}(G_{t,0}^0(X))\, | < \eta/3.$$

(ii) comme F est bornée ainsi que $W/W^{(-\rho)}$ sur $(0,a/2)$, et $W^{(-\rho)}/W$ sur $(0,a]$, il existe des constantes c_1, c_2, c_3, telles que pour tous $x, \delta \in (0,a/2)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}_x^{\uparrow}(G_{t,0}^x(X)) - \mathbb{E}_x^{\uparrow}(G_{t,\varepsilon}^x(X)) &\leq c_1\mathbb{E}_x^{\uparrow}(\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W(X_t)}(\mathbf{1}_{\{t<T_a\}} - \Theta_{t,\varepsilon}(X))) \\ &\leq c_2\mathbb{E}_x^{\uparrow}(\mathbf{1}_{\{X_t \leq a-\delta\}}\mathbb{P}_{X_t}^{\uparrow}(T_a < \varepsilon) + \mathbf{1}_{\{X_t > a-\delta\}}W^{(-\rho)}(X_t), t < T_a) \\ &\leq c_3(\mathbb{P}_{a-\delta}^{\uparrow}(T_a < \varepsilon) + \sup_{y\in(a-\delta,a)} W^{(-\rho)}(y)). \end{aligned}$$

En choisissant d'abord δ puis un bon majorant $\varepsilon_1(\eta)$ pour ε, on assure une majoration par $\eta/3$ uniforme en x.

(iii) on fixe désormais ε à $\varepsilon_0 \wedge \varepsilon_1$. La convergence faible des mesures de probabilité $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ vers $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$ quand $x \to 0^+$ et le fait que $G_{t,\varepsilon}^0$ soit $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$-p.s. continue, bornée, entraînent par le théorème de Portmanteau l'existence d'un $x_1 \in (0, a/2)$ tel que

$$\forall x < x_1, \qquad \mid \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(G_{t,\varepsilon}^0(X)\frac{W(x)}{W^{(-\rho)}(x)}) - \mathbb{E}_0^{\uparrow}(G_{t,\varepsilon}^0(X)) \mid < \eta/3,$$

puisque $\lim_{x\to 0^+} W(x)/W^{(-\rho)}(x) = 1$.

En rassemblant ces trois assertions (ε étant toujours fixé à $\varepsilon_0 \wedge \varepsilon_1$), il vient que

$$\forall x < x_1, \qquad \mid \mathbb{E}_0^{\uparrow}(F(X)\mathbf{1}_{\{t<T_a\}}\frac{W^{(-\rho)}(X_t)}{W(X_t)}\mathrm{e}^{\rho t}) - \mathbb{E}_x^{\updownarrow}(F(X)) \mid < \eta,$$

ce qui achève la démonstration. □

Corollary 1.19 *La λ-résolvante de $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$ admet pour densité en $x \in (0,a)$*

$$u_\lambda^{\updownarrow}(0,x) = \frac{W^{(\lambda-\rho)}(a-x)}{W^{(\lambda-\rho)}(a)}W^{(-\rho)}(x), \qquad \lambda > \rho,$$

et la loi d'entrée en 0 est donnée pour tous $t > 0$ et $x \in [0,a]$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0^{\updownarrow}(X_t \in dx)dt &= \frac{W^{(-\rho)}(x)W(a-x)}{W(a)}e^{\rho t}\mathbb{P}_{a-x}^{\uparrow}(T_a \in dt)dx \\ &= \frac{W^{(-\rho)}(x)}{W(x)}e^{\rho t}\mathbb{P}_0^{\uparrow}(X_t \in dx, t < T_a)dt. \end{aligned}$$

Dém. La convergence faible au sens de Skorohod entraîne la convergence faible des mesures $u_\lambda^{\updownarrow}(y,x)dx$ quand $y \to 0^+$ vers $u_\lambda^{\updownarrow}(0,x)dx$. Une version continue de $u_\lambda^{\updownarrow}(0,x)$ est donc la limite des applications $u_\lambda^{\updownarrow}(y,x)$ quand $y \to 0^+$, ce qui donne grâce à (1.8)

$$u_\lambda^{\updownarrow}(0,x) = \frac{W^{(\lambda-\rho)}(a-x)}{W^{(\lambda-\rho)}(a)}W^{(-\rho)}(x), \qquad \lambda > \rho.$$

La dernière égalité du corollaire découle directement de la relation d'absolue continuité de $\mathbb{P}_0^{\updownarrow}$ par rapport à $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$, tandis que la précédente tient à l'observation suivante :

$$\frac{W^{(\lambda-\rho)}(a-x)}{W^{(\lambda-\rho)}(a)} = \frac{W(a-x)}{W(a)}\mathbb{E}_{a-x}^{\uparrow}(\mathrm{e}^{-(\lambda-\rho)T_a}).$$

Voici qui achève la preuve. □

Remarque (propriété de compatibilité). On pourrait montrer, de la même manière qu'à la proposition 1.17, que conditionner par $\{T_{(0,a+\varepsilon)^c} = \infty\}$, puis par $\{T_{(0,a)^c} = \infty\}$, ou par $\{T_{(-\varepsilon,a)^c} = \infty\}$, puis par $\{T_{(0,a)^c} = \infty\}$, revient à conditionner directement par $\{T_{(0,a)^c} = \infty\}$: ceci montre que la h-transformée choisie pour confiner le processus de Lévy initial dans un intervalle borné inférieurement I est consistante, c'est-à-dire que si, de manière formelle, on désigne par H_I cette transformation, on a la relation de compatibilité suivante :

$$H_I \circ H_J = H_J \circ H_I = H_{I \cap J},$$

pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$ d'intersection non vide et de bornes inférieures finies.

Bibliographie

[1] Bertoin J. (1992)
An extension of Pitman's theorem for spectrally positive Lévy processes. Ann. Probab. **20** 1464-1483.

[2] Bertoin J. (1996)
Lévy processes. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Bertoin J. (1996)
On the first exit-time of a completely asymmetric stable process from a finite interval. Bull. London Math. Soc. **5** 514-520.

[4] Bertoin J. (1997)
Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval. Ann. Appl. Prob. **7** 156-169.

[5] Bertoin J. (1997)
Cauchy's principal value of local times of Lévy processes with no negative jumps via continuous branching processes. Elec. J. Prob. **6** 1-12.

[6] Bingham N.H. (1975)
Fluctuation theory in continuous time. Adv. in Appl. Prob. **7** 705-766.

[7] Bingham N.H. (1976)
Continuous branching processes and spectral positivity. Stoch. Proc. Appl. **4** 217-242.

[8] Borovkov A.A. (1976)
Stochastic Processes in Queuing Theory. Springer, Berlin.

[9] Dellacherie C., Meyer P.A. (1980)
Probabilités et Potentiel (tome 2). Hermann, Paris.

[10] Dellacherie C., Meyer P.A. (1987)
Probabilités et Potentiel (tome 4). Hermann, Paris.

[11] Dellacherie C., Meyer P.A., Maisonneuve B. (1992)
Probabilités et Potentiel (tome 5). Hermann, Paris.

[12] Emery D.J. (1973)
Exit problem for a spectrally positive process. Adv. in Appl. Prob. **5** 498-520.

[13] Grey D.R. (1974)
Asymptotic behaviour of continuous-time, continuous state-space branching processes. J. Appl. Prob. **11** 669-677.

[14] Jirina M. (1958)
Stochastic branching processes with continuous state space. Czech. Math. J. **8** 292-312.

[15] Knight F.B. (1969)
Brownian local times and taboo processes. Trans. Amer. Math. Soc. **143** 173-185.

[16] Lambert A. (1999)
Completely asymmetric Lévy processes confined in a finite interval. Ann. Inst. Henri Poincaré **36** 251-274.

[17] Lamperti J. (1967)
Continuous-state branching processes. Bull. Amer. Math. Soc. **73** 382-386.

[18] Le Gall J.F., Le Jan Y. (1998)
Branching processes in Lévy processes : the exploration process. Ann. Probab. **26** 213-252.

[19] Prabhu N.U. (1981)
Stochastic Storage Processes, Queues, Insurance Risk and Dams. Springer, Berlin.

[20] Robbins H., Siegmund D. (1972)
On the law of the iterated logarithm for maxima and minima. Proc. Sixth Berkeley Symp. vol.III 51-70.

[21] Rogers L.C.G. (1984)
A new identity for real Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré série B. **20** 21-34.

[22] Rogers L.C.G. (1989)
A guided tour through excursions. Bull. London Math. Soc. **21** 305-341.

[23] Rogers L.C.G. (1990)
The two-sided exit problem for spectrally positive Lévy processes. Adv. in Appl. Prob. **22** 486-487.

[24] Suprun V.N. (1976)
Problem of destruction and resolvent of terminating process with independent increments. Ukrainian Math. J. **28** 39-45.

[25] Seneta E., Vere-Jones D. (1966)
On quasi-stationary distributions in discrete-time Markov chains with a denumerable infinity of states. J. Appl. Prob. **3** 403-434.

[26] Takács L. (1966)
Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. Wiley, New York.

[27] Tuominen P., Tweedie R.L. (1979)
Exponential decay and ergodicity of general Markov processes and their discrete skeletons. Adv. in Appl. Prob. **11** 784-803.

[28] Vere-Jones D. (1967)
Ergodic properties of non-negative matrices. Pac. J. Math. **22** 361-386.

Chapitre 2

La généalogie des processus de branchement avec immigration

Ce chapitre a été accepté pour publication par la revue Probability Theory and Related Fields.

Abstract. Recent works by J.F. Le Gall and Y. Le Jan [15] have extended the genealogical structure of Galton-Watson processes to continuous-state branching processes (CB). We are here interested in processes with immigration (CBI).

The height process H which contains all the information about this genealogical structure is defined as a simple local time functional of a strong Markov process $X^\star$, called the genealogy-coding process (GCP). We first show its existence using Itô's synthesis theorem. We then give a pathwise construction of $X^\star$ based on a Lévy process X with no negative jumps that does not drift to $+\infty$ and whose Laplace exponent coincides with the branching mechanism, and an independent subordinator Y whose Laplace exponent coincides with the immigration mechanism. We conclude the construction with proving that the local time process of H is a CBI-process.

As an application, we derive the analogue of the classical Ray-Knight-Williams theorem for a general Lévy process with no negative jumps.

Mathematics Subject Classification (2000) : Primary 60J80. Secondary 60K05.
Key words : Lévy process - Continuous-state branching process with immigration - Genealogy - Height process - Excursion measure.

2.1 Introduction

A continuous-state branching process (CB) is a strong Markov process Z with values in $[0, \infty]$, 0 and ∞ being absorbing states. It is characterized by its branching mechanism function ψ and enjoys the following branching property. The sum of two independent CB(ψ) starting respectively from x and y, is a CB(ψ) starting from $x + y$. CB-processes are the analogue of (Galton-Watson) discrete-branching processes (DB) in continuous time and continuous state-space. The very difference between DB and CB-processes is that the definition of a DB-process is based on a random tree (Z_n is the number of particles at the n-th generation), whereas that of a CB-process is intrinsic. In this direction, J.F. Le Gall and Y. Le Jan [15] have defined a continuous genealogical structure via a non-Markovian process called the height process. It is the continuous analogue of the process of successive heights in the finite discrete tree explored in the lexicographical order. The motivation for the study of the genealogical structure of CB-processes is to extend the construction of superprocesses with quadratic branching to more general branching mechanisms. In the special case of quadratic branching mechanism, a natural construction of the superprocess involves the path-valued process known as the Brownian snake, which loosely speaking combines quadratic branching and Brownian spatial motion. Extending these results to other branching mechanisms requires detailed information about the genealogical structure of the associated CB-process. For a deep understanding of this topic, see [16].

As in the discrete setting, the CB-process does not contain the information on the genealogy. The height process is therefore only defined in law. Nevertheless, a pathwise construction can be given from the paths of a spectrally positive (i.e. with no negative jumps) Lévy process X whose Laplace exponent coincides with the branching mechanism function ψ. Namely, for every $t \geq 0$, H_t is defined by

$$H_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s - \inf_{s \leq r \leq t} X_r < \varepsilon\}} ds. \tag{2.1}$$

Roughly speaking, as H_t is the height in the tree of particle t, the total 'time spent' by H at level $x \geq 0$ is the amount of population belonging to generation x. Indeed the main theorem of [15] states that the local time process of H as a function of the space variable $(Z_x, x \geq 0)$ is a CB(ψ).

Next consider a Galton-Watson tree and add independently from the tree at each generation n a random number Y_n of particles, where the Y_i's are i.i.d. Then the process that associates to every integer n the number of particles of the n-th generation of the modified tree is called a discrete-branching process with immigration (DBI). Adding at each generation $n-1$ a virtual father to the immigrating particles allows us to keep up with the tree structure. The aim of the present paper is to find out the continuous analogue of such a genealogy.

Indeed DBI-processes have a continuous analogue known as CBI-processes. These are strong Markov processes valued in $[0, \infty]$, where 0 is no longer absorbing. They are characterized by their branching mechanism function ψ and their immigration mechanism function ϕ. The sum of a CBI(ψ , ϕ) started at x and an independent CB(ψ) started at y is a CBI(ψ , ϕ) started at $x+y$. To give a pathwise construction of the height process, we now need more than the information contained in the paths of the spectrally positive Lévy process X. We thus have to show the existence of a strong Markov process $X^\star$ called the genealogy-coding process (GCP) satisfying the next assertion. Applying an analogue of the local time functional (2.1) to $X^\star$ gives rise to a newly distributed height process $H^\star$, whose local time process is a CBI(ψ, ϕ).

The GCP is defined by its excursion measure $N^\star$ away from 0. Let Y denote a subordinator with Laplace exponent ϕ, and X a Lévy process with Laplace exponent ψ

independent from Y. The measure $N^\star$ is then defined in terms of the law of X killed upon reaching 0 and the Lévy measure of jumps of Y. The existence of a measure of probability $\mathbb{P}^\star$ with excursion measure $N^\star$ follows from Itô's synthesis theorem. A pathwise construction of $X^\star$ is also given by

$$X_t^\star = X_t + Y(Y^{-1}(-\inf_{s\le t} X_s)).$$

This is completed by proving that the local time process of $H^\star$ is as expected a CBI(ψ, ϕ).

The last section is devoted to the extension of the Ray-Knight-Williams theorem to general spectrally positive Lévy processes. For simplicity, assume that X is a recurrent Lévy process with no negative jumps and Laplace exponent ψ. The existence of a law $\mathbb{P}^\uparrow$ of X conditioned to stay positive is well-known. Our theorem identifies the Lévy process conditioned to stay positive and the genealogy-coding process associated to a branching mechanism ψ, and an immigration mechanism ϕ, where

$$\phi(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}, \qquad \lambda \ge 0.$$

In the Brownian case, the height process under $\mathbb{P}^\uparrow$ is a Bessel process of dimension 3 (BES(3)). Our theorem thus reduces in this case to the Ray-Knight-Williams theorem which ensures that the local time process of a BES(3) is a CBI(ψ, ϕ), where $\psi(\lambda) = \lambda^2/2$, $\phi(\lambda) = \lambda/2$, that is a squared Bessel process of dimension 2 (see [25]).

The paper is organized as follows. In the next section, we set the main notations and recall some known facts about CBI-processes. We also give details in the discrete setting concerning the height process and the genealogy-coding walk (GCW). In section 3, we show the existence of the law of the GCP $X^\star$ and give a pathwise construction of $X^\star$. In section 4, we check that the height process derived from the GCP has the requested law, that is its local time process as a function of the space variable is a CBI-process. The last section deals with the extension of the Ray-Knight-Williams theorem.

2.2 Preliminaries

Consider a finite rooted tree, using the coding of Neveu. A vertex u of the tree which belongs to generation $n \in \mathbb{N}$ is denoted by a finite sequence of positive integers $u = (u_0, \dots, u_n)$ defined recursively as follows. For any $k = 0, \dots, n$, the unique ancestor of u at generation $k-1$ (i.e. the root if $k = 0$) has a distinguishable offspring ordered from left to right. Then the unique ancestor of u at generation k (i.e. the vertex u itself if $k = n$) belongs to this offspring, and u_k denotes its rank in this offspring. Explore this tree according to the lexicographical order associated to this coding (for example $1 < 11 < 12 < 121$). To the n-th visited particle, associate W_n the sum of the numbers of younger brothers of all its ancestors, including itself. Define the height process H_n as the number of generation of the n-th particle. It can be recovered from W by

$$H_n = \mathrm{card}\{j : 0 \le j < n, W_j = \inf_{j\le l\le n} W_l\}.$$

We call H the exploration process, or height process. It is clear that this process contains the whole information about the genealogy of the tree.

Let us introduce probability measures on trees. First consider $f(s) = \sum_{k\geq 0} \nu(k)s^k$ a probability generating function, and the probability measure associated to Galton-Watson trees with offspring distribution ν. The key idea of [15] is that under this probability, W is a random walk on the integers with jump distribution $\tilde{\nu}(k) = \nu(k+1), k = -1, 0, 1, \ldots$ killed at its hitting time of -1. The associated Galton-Watson process Z, or DB-process (discrete branching), is then equal to

$$Z_p = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{H_n = p}, \qquad p \geq 0.$$

It is clear that conversely one can start with a random walk with jump distribution $\tilde{\nu}$. The same method then applies to construct a Galton-Watson tree (thanks to the knowledge of H) and the associated DB-process.

As a second step, add some immigration. Let $g(s) = \sum_{k\geq 0} \mu(k)s^k$, be a probability generating function. We can still achieve the immigration procedure sticking to a tree-like structure. We define this tree by giving a virtual father to the immigrating particles. Start with $N+1$ particles, and mark the rightmost one.

1. each generation contains one and only one marked particle. Give it k children with probability $\mu(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$ Give independently to the other particles an offspring with distribution ν.
2. at each generation, mark the rightmost particle.

The discrete-time branching process with branching mechanism ν and immigration mechanism μ, denoted by DBI(f, g), is the process that associates to each integer $n \geq 0$ the number Z_n of unmarked particles of the n-th generation. It is a Markov chain on the nonnegative integers with transition matrix (P_{ij}) given by

$$\mathbf{E}_i(s^{Z_1}) = \sum_{j\geq 0} P_{ij}s^j = (f(s))^i g(s), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

In particular, a DBI(f, 1) is a DB(f) (a time-discrete branching process with branching mechanism f), and if $u_k(s)$ denotes the quantity $\mathbf{E}_1(s^{Z_k})$ when $g \equiv 1$ (u_k is known to be the k-th iterate of f), then for every DBI(f, g) starting from $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}_i(s^{Z_n}) = (u_n(s))^i \prod_{k=0}^{n-1} g(u_k(s)), \qquad s \in [0,1]. \tag{2.2}$$

With this new probability measure on (marked) trees, we are able to state a more general result. First set some notations. Let ϵ denote a generic path with finite duration $V(\epsilon) \geq 1$ defined on $\{1, \ldots, V(\epsilon)\}$. Now for a sequence $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ of finite paths, define recursively their concatenation $[\epsilon] = [\epsilon_i]_{i\geq 1}$ as follows. $[\epsilon]_0 = 0$, and

$$[\epsilon]_{V(\epsilon_1)+\cdots+V(\epsilon_n)+k} = \epsilon_{n+1}(k), \qquad n \geq 1, 1 \leq k \leq V(\epsilon_{n+1}).$$

In the following statement, we are still interested in the total number of younger unmarked brothers W_n of the ancestors of the n-th particle, and in its height in the tree, but this tree now is distributed according to the branching mechanism ν and immigration μ. We skip the proof for conciseness.

Proposition 2.1 *Recall that* $\tilde{\nu}(k) = \nu(k+1), k \geq -1$.

Set $W^\star \doteq [W^{(i)}]_{i\geq 1}$, *where the* $W^{(i)}$*'s are i.i.d. finite random paths such that each* $W^{(i)}$ *is a random walk with initial distribution* μ, *with step distribution* $\tilde{\nu}$, *and killed at* $T_0 + 1$, *where* $T_0 = \inf\{n \geq 1 : W_n = 0\}$. *The process* $W^\star$ *is called the GCW(f,g), or genealogy-coding walk associated to the probability generating functions* f *and* g. *Define*

$$H_n^\star = card\{j : 0 \leq j < n, W_j^\star = \inf_{j\leq l\leq n} W_l^\star\}, \qquad n \geq 0,$$

and

$$Z_p^\star = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{H_n^\star = p}, \qquad p \geq 0.$$

Then $(Z_p^\star - 1, p \geq 0)$ *is a DBI(f, g).*

We stress that by construction, $Z_p^\star$ is the total number of particles belonging to generation p. We thus have to remove the marked particle at each generation to recover the DBI-process.

In the tree semantics, $H_n^\star$ is the height in the tree of the n-th visited particle. If $\gamma_n = \sup\{j \leq n : W_j^\star = 0\}$, then

$$H_n^\star = \mathrm{card}\{0 \leq j < \gamma_n : W_j^\star = 0\} + \mathrm{card}\{\gamma_n \leq j \leq n : W_j^\star = \inf_{j\leq l\leq n} W_l^\star\}.$$

The first term is the number of times when the GCW visits the rightmost branch of the tree, that is the height of the last visited marked particle. Then the n-th particle is a descendant of this marked particle, and the second term is its height in this subtree.

Notice that two random walks (r.w.) underlie the discrete setting. The first is a so-called left-continuous r.w. W with step distribution $\tilde{\nu}$. The second is the renewal process Y with jump distribution μ that gives at time n the total number of immigrants up until the n-th generation.

In [15], the tree is linked to a LIFO queue. Every (positive) increment $W_n - W_{n-1}$ is viewed as some service required by a customer arrived at time n. The task is over as soon as W reaches W_{n-1}, and in the meanwhile, each new service is prioritary (Last In First Out). The genealogy is built up by saying that each customer is the son of who he interrupted. In the case with immigration, we suppose that extra service is required every time the queue is empty. These services are i.i.d. and independent of the rest of the queue (i.e. the increments of the renewal process Y).

We now deal with the continuous setting. It is well-known that DBI-processes have a continuous state-space time-continuous analogue, called CBI-processes. Let ψ be the Laplace exponent of a spectrally positive Lévy process, and ϕ that of a subordinator (ψ is convex and ϕ is concave). They are specified by the Lévy-Khinchin formula

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-\lambda r} - 1 + \lambda r \mathbf{1}_{r<1})\Lambda(dr), \qquad \lambda \geq 0, \tag{2.3}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ denotes the Gaussian coefficient, and the Lévy measure Λ is a measure on $(0, \infty)$ such that $\int_0^\infty (r^2 \wedge 1)\Lambda(dr) < \infty$. Similarly

$$\phi(\lambda) = \delta\lambda + \int_0^\infty (1 - \mathrm{e}^{-\lambda r})\Gamma(dr), \qquad \lambda \geq 0, \tag{2.4}$$

where $\delta \geq 0$ is the drift coefficient and the Lévy measure Γ is a measure such that $\int_0^\infty (r \wedge 1)\Gamma(dr) < \infty$.

A CBI-process with branching mechanism ψ and immigration mechanism ϕ is denoted by CBI(ψ, ϕ). It is a Markov process Z taking values in $[0, \infty]$, whose transition kernels are characterized by their Laplace transform

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t}) &= \mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t} \mid Z_0 = x) \\ &= \exp[-x u_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds], \qquad x \geq 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

where $u_t(\lambda)$ is the unique nonnegative solution of the integral equation

$$v(t) + \int_0^t \psi(v(s))ds = \lambda, \qquad \lambda \geq 0, t \geq 0. \tag{2.5}$$

For existence and unicity of such a process Z, see [13, Theorem 1.1].

Notice that a spectrally positive Lévy process is the continuous analogue of a left-continuous r.w., and a subordinator that of a renewal process (the jumps of the subordinator embody the arrival of immigrants). Compare the preceding equations with (2.2), and see [19] for more details, and the references therein.

In particular, a CBI(ψ, 0) is a CB(ψ) that satisfies the following branching property. The sum of two independent CB(ψ) starting respectively from x and y, is a CB(ψ) starting from $x + y$. In that case ($\phi \equiv 0$), we give a brief account of the continuous analogue results given in [14] and [15].

Consider a spectrally positive Lévy process X with Laplace exponent ψ, and assume that $\psi'(0+) \geq 0$ (the process X does not drift to $+\infty$). Define the height process H_t as the local time at 0 at time t of $S^{(t)} - X^{(t)}$, where

$$X_s^{(t)} = X_t - X_{(t-s)-}, \qquad 0 \leq s \leq t,$$

and $S^{(t)}$ its associated supremum process $S_s^{(t)} = \sup_{0 \leq r \leq s} X_r^{(t)}$. The normalization for this local time is such that

$$H_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_s^{(t)} - X_s^{(t)} < \varepsilon\}} ds = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s - \inf_{s \leq r \leq t} X_r < \varepsilon\}} ds. \tag{2.6}$$

Moreover, there is a lower semicontinuous version of the process $(H_t, t \geq 0)$ with values in $[0, \infty]$. Next let T_y denote the first hitting time of $(-\infty, y)$ by X ($y \leq 0$). The main theorem of [15] states that the random measure $\mathcal{Z}_x$ on $\mathbb{R}_+$ defined by

$$< \mathcal{Z}_x, h >= \int_0^{T_{-x}} h(H_s)ds,$$

has a density $(Z_a, a \geq 0)$ w.r.t. Lebesgue measure, which is a CB(ψ) started at x (Z can be viewed as the local time process of H).

When some immigration is added, we should like to find out an analogue of the genealogy-coding process (W in the discrete setting, X in the continuous setting) and then check that the same kind of construction gives rise to a branching process with immigration.

We point out that there is an alternative way of defining the genealogy of a continuous tree. Though, this definition does not seem appropriate for the study of snakes and superprocesses. We could recall these results (see [6]), but it is as easy to give straight away the (more general) analogue in the case with immigration.

We first emphasize the role of the initial value of the CBI-process and write $Z_t = Z(t, a)$ for the value at time t of a CBI(ψ, ϕ) starting from $Z_0 = a \in [0, \infty)$. The additive property for branching processes implies that if $Z'(\cdot, b)$ is an independent CBI($\psi, 0$) (that is a CB(ψ)) starting from b, then $Z(\cdot, a)+Z'(\cdot, b)$ has the same law as $Z(\cdot, a+b)$. Invoking Kolmogorov's theorem, we can thus construct a process ($Z(t, a), t \geq 0$ and $a \geq 0$) such that $Z(\cdot, 0)$ is a CBI(ψ, ϕ) starting from 0, and for every $a, b \geq 0$, $Z(\cdot, a+b) - Z(\cdot, a)$ is independent from the family of processes $(Z(\cdot, c), 0 \leq c \leq a)$ and has the law of a CB(ψ) starting from b.

In particular, for each fixed $t \geq 0$, we will choose the right-continuous modification of the process $Z(t, \cdot)$, which is then a subordinator with Laplace exponent $u_t(\cdot)$ and initial value α_t a positive r.v. with Laplace exponent

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda\alpha_t}) = \exp(-\int_0^t \phi(u_s(\lambda))\, ds), \qquad \lambda \geq 0, t \geq 0.$$

In the following statement, the positive real number $S^{(s,t)}(a)$ is to be interpreted as the total progeny at time t of the amount of population $[0, a]$ present at time s, with branching-immigrating mechanism (ψ, ϕ). The proof of this statement is easily adapted from [6, Proposition 1].

Proposition 2.2 *On some probability space, there exists a process $(S^{(s,t)}(a), 0 \leq s \leq t$ and $a \geq 0)$ such that*

(i) For every $0 \leq s \leq t$, $S^{(s,t)} = (S^{(s,t)}(a), a \geq 0)$ is a subordinator with Laplace exponent $u_{t-s}(\cdot)$ starting from a r.v. $S^{(s,t)}(0)$ distributed as α_{t-s}.

(ii) For every integer $p \geq 2$, and $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_p$, the subordinators $S^{(t_1,t_2)}, \ldots, S^{(t_{p-1},t_p)}$ are independent and

$$S^{(t_1,t_p)}(a) = S^{(t_{p-1},t_p)} \circ \cdots \circ S^{(t_1,t_2)}(a), \qquad \forall a \geq 0 \qquad a.s.$$

Finally, the processes $(S^{(0,t)}(a), t \geq 0$ and $a \geq 0)$ and $(Z(t, a), t \geq 0$ and $a \geq 0)$ have the same finite-dimensional marginals.

As in [6], this proposition enables us to make the following consistent definition of genealogy. For every $a, b \geq 0$, and $0 \leq s \leq t$, we say that the individual a in population at time t has ancestor at time s the individual b if b is a jump time of $S^{(s,t)}$ and

$$S^{(s,t)}(b-) < a < S^{(s,t)}(b).$$

2.3 The genealogy-coding process $X^\star$

In this section, we introduce the continuous analogue of the genealogy-coding walk defined in the last section. We will call it the genealogy-coding process (GCP) $X^\star$. Roughly speaking, the GCP is a spectrally positive Lévy process reflected on the range of an independent subordinator Y. In particular when Y is deterministic, the GCP is the Lévy process X reflected at 0, that is, $X^\star = X - I$, where $I_t = \inf_{s\leq t} X_s$. In the next section we will see the link between its paths and CBI-processes, in a way similar to that of Proposition 2.1.

2.3.1 Itô's synthesis

In the last section, the sample-paths of the GCW$(f,\ g)$ could be viewed as the concatenation of a sequence of independent excursions away from 0, which started with a jump of law μ (immigration mechanism), and then proceeded as the random walk with step distribution $\tilde{\nu}$ (branching mechanism) killed upon hitting 0. Informally, this suggests that we should define the GCP as the concatenation of a sequence of independent excursions which start with the jump of a certain subordinator Y (with Laplace exponent ϕ for the immigration), and then evolve like a certain spectrally positive Lévy process X (with Laplace exponent ψ for the branching mechanism) killed upon reaching 0.

This fits the classical problem of recurrent extensions of Markov processes, which goes back to Feller and Itô [11]. More precisely, given a Markov process X killed upon hitting some given point x_0 for the first time, the program is to characterize all the recurrent Markov processes X' having the same law as X when killed at the first hitting time of x_0. The killed Markov process X is called the minimal process, and the possible X' are the extensions of the minimal process. In the Brownian case, the extensions are known as Feller Brownian motions (see [12, p.186]).

The definitive treatment of this question was done in [23],[24], and a survey can be found in [8]. See also [21] for an analytic counterpart.

The usual way of tackling the extension problem relies on excursion theory. Roughly speaking, it uses Itô's synthesis theorem which links i.i.d. excursions together in order to produce a Markov process. To apply this tool, we need to set some notations and recall some facts about excursion theory.

We use the canonical representation. Let $\mathcal{D} = \mathcal{D}([0,\infty), \mathbb{R})$ be the space of càdlàg functions, endowed with Skorohod's topology and the natural filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Let $\mathcal{E}$ be the space of excursions ϵ in $\mathcal{D}$ (paths with finite lifetime $V(\epsilon)$). Now let M be a recurrent real-valued strong Markov process with càdlàg paths, such that 0 is regular, that is

$$\mathbb{P}_0(\inf\{s > 0 : M_s = 0\} = 0) = 1.$$

Then it is known that there exists a unique (up to a multiplicative constant) continuous increasing process L adapted to the natural filtration of M, called local time at level 0 of M, such that

1. The support of dL coincides with the closure of $\{t : M_t = 0\}$ a.s.
2. L is an additive functional of M.

The inverse local time τ

$$\tau_s = \inf\{t \geq 0 : L_t > s\}$$

is a subordinator whose jumps coincide exactly with the excursion intervals of M. Specifically, we can index the excursions of M away from 0 by the jump times of τ. For $t > 0$, set

$$e_t = \begin{cases} (M_{\tau_{t-}+s}, 0 \leq s < \tau_t - \tau_{t-}) & \text{if } \tau_{t-} < \tau_t \\ \Upsilon & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where Υ is an additional isolated point. A fundamental theorem by Itô asserts that $(e_t, t \geq 0)$ is a Poisson point process in $\mathcal{E} \cup \{\Upsilon\}$. Its characteristic measure is called the excursion measure and is a (σ-finite) infinite measure on $\mathcal{E}$. This measure has the strong Markov property and its semigroup is that of M killed upon reaching 0.

Conversely, the program of Salisbury and Itô is to produce a Markov process with given excursion measure. In our particular case, we work by analogy with the discrete setting. Recall that the excursion of the GCW(f, g) starts with some immigration with law μ and then proceeds as the random walk of jump distribution $\tilde{\nu}$ until it hits 0. Now in the continuous setting, the immigration is driven by some subordinator Y and thus has two components, a linear immigration (due to the drift part of the subordinator), and an immigration by jumps (the jump part of the subordinator). We thus have to cope with two kinds of excursions, those starting with a jump of Y that behave as the Lévy process X until it reaches 0, and those starting at 0 (infinitesimal immigration). Intuitively, the latter should have in some sense the limiting distribution of X started at x and killed upon reaching 0 as $x \to 0+$. We will see that a good choice for this measure is the excursion measure of $X - I$ away from 0, where I stands for the infimum process of X. Indeed, since 0 is regular for $(-\infty, 0)$ w.r.t. X, it is regular for itself w.r.t. $X - I$, and it is known that $X - I$ is a strong Markov process (see Proposition VI.1 in [4]). We are therefore able to define this measure up to a multiplicative constant. We shall take the associated local time equal to $-I$, which forces the choice of the constant factor. We stress that the semigroup of this measure is that of X killed upon reaching 0.

Consider the family of measures $(N_r, r \geq 0)$ defined on $\mathcal{E}$ as follows

– N_0 stands for the excursion measure of $X - I$ away from 0 under $\mathbb{P}_0$.

– For $r > 0$, N_r denotes the law of X started at r and killed upon reaching 0.

Now we can lay out the problem in proper terms. Let $X = (X_t, t \geq 0)$ and $Y = (Y_t, t \geq 0)$ be the first and second coordinate processes on $\Omega = \mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Let $(\mathbb{P}_x)_{x>0}$ be a family of probability measures on Ω for which X is a spectrally positive (i.e. with no negative jumps) Lévy process starting from x, and Y an independent subordinator starting from 0. The Laplace exponents of X and Y are those specified in the Preliminaries by (2.3) and (2.4). The paths of X are assumed not to drift to $+\infty$ and to have infinite variation, that is $\psi'(0+) \geq 0$ and either $\int_0 r\Lambda(dr) = \infty$ or $\beta > 0$. Analogously to the discrete setting, we have to find out a Markov process $X^\star$ (the genealogy-coding process) whose excursion measure $N^\star$ away from 0 can be described as follows

$$N^\star = \int_0^\infty \Gamma(dr) N_r + \delta N_0,$$

where we remind that Γ and δ are defined in (2.4).

More precisely $N^\star$ is the sum of two disjoint σ-finite measures on $\mathcal{E}$. The first has support $\{\epsilon \in \mathcal{E} : \epsilon(0) > 0\}$ and satisfies

(i) For $x > 0$, conditional on $\{\epsilon(0) = x\}$, ϵ behaves as the process X started at x and killed upon reaching 0,

(ii) The σ-finite distribution of $\epsilon(0)$ is

$$N^\star(\epsilon(0) \in dr) = \Gamma(dr) \qquad r > 0.$$

The second has support $\{\epsilon \in \mathcal{E} : \epsilon(0) = 0\}$ and is equal to δN_0, where we recall that N_0 is the excursion measure of $X - I$ away from 0.

We prove thanks to Itô's synthesis theorem that there exists a unique Markovian family of probability measures $(\mathbb{P}^\star_x, x \geq 0)$ on $\mathcal{D}$ such that 0 is instantaneous ($\mathbb{E}^\star_0(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=0\}} dt) = 0$) and

(i) The excursion measure away from 0 under $\mathbb{P}^\star_0$ is $N^\star$.

(ii) For any nonnegative measurable F and G,

$$\mathbb{E}^\star_x(F(X_s, s \leq T_0) G(X_{s+T_0}, s \geq 0)) = \mathbb{E}_x(F(X_s, s \leq T_0)) \mathbb{E}^\star_0(G(X_s, s \geq 0)),$$

where T_0 stands for the first hitting time of 0.

We call the canonical process $X^\star$ under $\mathbb{P}^\star$ the genealogy-coding process associated to the Laplace exponents ψ and ϕ, abbreviated GCP(ψ, ϕ). We shall always assume in the sequel that Y is not a compound Poisson process, as otherwise our results would merely reduce to those of [15].

Let us start with the uniqueness result for the family $\mathbb{P}^\star$. Since 0 is instantaneous, it is known that

$$\mathbb{E}^\star_0(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} g(X_t) dt) = N^\star(\int_0^V \mathrm{e}^{-t} g(\epsilon_t) dt),$$

where g is any bounded measurable function. The definition of $\mathbb{P}^\star_x$ then implies that

$$\mathbb{E}^\star_x(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} g(X_t) dt) = \mathbb{E}_x(\int_0^{T_0} \mathrm{e}^{-t} g(X_t) dt) + \mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{-T_0}) N^\star(\int_0^V \mathrm{e}^{-t} g(\epsilon_t) dt),$$

hence the knowledge of $N^\star$ and that of $(\mathbb{P}_x, x \geq 0)$ determine that of the last quantities for every $x \geq 0$ and bounded measurable g. It follows from standard results that the semigroup of $(\mathbb{P}^\star_x, x \geq 0)$ is then uniquely determined.

As for the existence of the family $\mathbb{P}^\star$, we apply Itô's synthesis theorem to the excursion measure $N^\star$. We check that the hypotheses of Theorem V.2.10 p.145 in [8] hold in our special case. Specifically, required properties such as the Feller property of the minimal process and technical properties about $(\mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda T_0}), \lambda, x \geq 0)$ are easily verified. We need only show that $N^\star$ is compatible with the minimal semigroup. Namely, for all $s > 0, \Theta \in \mathcal{F}_s$, and bounded measurable F,

$$N^\star(F \circ \theta_s; \Theta \cap \{V > s\}) = N^\star(N_{\epsilon_s}(F); \Theta \cap \{V > s\}).$$

This follows from the fact that the measures $(N_r, r \geq 0)$ have the same semigroup as that of the killed Lévy process.

2.3.2 Pathwise construction of the GCP

Our aim is to give here a pathwise construction of a version of the GCP, still denoted $X^\star$, based on the paths of X and Y. As Y is a.s. increasing, we can define its right inverse Y^{-1} by

$$Y_s^{-1} = \inf\{t : Y_t > s\}, \qquad s \geq 0.$$

Set also

$$I_t = (\inf_{s \leq t} X_s) \wedge 0, \qquad t \geq 0.$$

We can now state the

Theorem 2.3 *Define*

$$X_t^\star \doteq X_t + \inf(\mathcal{R} \cap (-I_t, \infty)) = X_t + Y(Y^{-1}(-I_t)),$$

where $\mathcal{R}$ stands for the range of Y. Under $I\!P_x$, the law of this process is equal to $I\!P_x^\star$. More precisely, we may (and will) define the local time at 0 of $X^\star$ by

$$L_t^\star = Y^{-1}(-I_t),$$

and then the excursion measure of $X^\star$ away from 0 is $N^\star$.

Proof. The first step is showing that $L^\star$ as defined in the theorem is a local time for $X^\star$. The second step uses the compensation formula for X and Y, to prove that the excursion process of $X^\star$ away from 0 is a Poisson point process with excursion measure $N^\star$. Then the theorem will follow from the uniqueness of the family $\mathbb{P}^\star$ (in particular, $X^\star$ as defined by this pathwise construction, is a Markov process).

First step. As X is spectrally positive, $-I$ is continuous increasing a.s., and so is Y^{-1} (for Y is not a compound Poisson process), thus by composition the same holds for $L^\star$.

We prove that $L^\star$ is an additive functional adapted to the natural filtration of $X^\star$. When $\Gamma = 0$, $L_t^\star = -I_t/\delta$ is known to be an adapted additive functional of $X - I = X^\star$.

When Γ is finite, the number of excursions of $X^\star$ away from 0 starting from positive values and occurring before time t is finite. It then suffices to proceed as in the previous case after discarding these excursions.

When Γ is infinite, a standard argument shows there is a sequence $\varepsilon_n \to 0$ such that with probability one for all t, $N_{\varepsilon_n}(t)/\Gamma(\varepsilon_n, \infty)$ converges to t, where

$$N_\varepsilon(t) = \mathrm{Card}\{s \le t : \Delta Y_s > \varepsilon\}.$$

Hence $N_{\varepsilon_n}(Y^{-1}(-I_t))/\Gamma(\varepsilon_n,\infty)$ converges a.s. to $L^\star_t$. Next notice that $X^\star_{s-} = 0$ iff $X_s = I_s$ and $-I_s \in \mathcal{R}$. Since a dual ladder time (i.e. an increase time for $-I$) cannot be a jump time for X,

$$X^\star_{s-} = 0 \text{ and } \Delta X^\star_s > \varepsilon_n \Leftrightarrow X_s = I_s \text{ and } \Delta Y(Y^{-1}(-I_s)) > \varepsilon_n,$$

and it follows that $N_{\varepsilon_n}(Y^{-1}(-I_t))$ is exactly equal to

$$\mathrm{Card}\{s \le t : X^\star_{s-} = 0, \Delta X^\star_s > \varepsilon_n\},$$

which is obviously measurable relative to $\sigma\{X^\star_s, s \le t\}$.

We get the fact that $L^\star$ is a local time by proving that for all $x \ge 0$,

$$\mathrm{supp}(dL^\star) = \{t : X^\star_{t-} = 0\} \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.}$$

Take two rationals $a < b$. If for all $t \in (a,b)$ $X^\star_{t-} > 0$, then $(-I_b,\infty)\cap\mathcal{R} = (-I_a,\infty)\cap\mathcal{R}$, that is $(-I_b,-I_a)\cap\mathcal{R} = \emptyset$, hence $Y^{-1}(-I_a) = Y^{-1}(-I_b)$.

Consider

$$\zeta = \inf\{s \ge a : X^\star_{s-} = 0\} \in (a,\infty) \quad \text{a.s.}$$

Conditional on $\mathcal{R}$, ζ is a stopping time relative to the natural filtration of X. Now a spectrally positive Lévy process started at 0 immediately takes on negative values and so by the strong Markov property applied at ζ, ζ is a right increase time for $-I$. But $I_\zeta \in \mathcal{R}$ a.s., that is $-I_\zeta$ is a right increase time for Y^{-1}, hence ζ is a right increase time for $L^\star$. We just proved that if there exists $t \in (a,b)$ such that $X^\star_{t-} = 0$, then $L^\star_a < L^\star_b$ a.s. Then by continuity of $L^\star$, for all $x \ge 0$,

$$\mathbb{P}_x(\forall a < b, [\forall t \in (a,b),\ X^\star_{t-} > 0 \Leftrightarrow L^\star_a = L^\star_b]) = 1.$$

Second step. As previously mentioned, we shall prove that the excursion process of $X^\star$ is a Poisson point process with excursion measure $N^\star$. Specifically, set $\tau^\star$ the inverse local time

$$\tau^\star_s = \inf\{t : L^\star_t > s\} = T_{-Y_s}, \qquad s \ge 0.$$

We recall that since $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is strictly increasing, it has an inverse ψ^{-1}, which is known to be the Laplace exponent of the subordinator $(T_{-x}, x \ge 0)$ (until the end of the proof, we write T_{-x} instead of $T_{(-\infty,-x)}$). Note then that $\tau^\star$ is the composition in the sense of Bochner of two independent subordinators with Laplace exponents ψ^{-1} and ϕ respectively, it is hence a subordinator with exponent $\phi\circ\psi^{-1}$. Then for $s\geq 0$ set as usual in $\mathcal{E}$

$$e_s^\star = \begin{cases} (X^\star_{\tau^\star_{s-}+t}, 0\leq t<\tau^\star_s-\tau^\star_{s-}) & \text{if } \tau^\star_{s-}<\tau^\star_s \\ \Upsilon & \text{otherwise.}\end{cases}$$

We point out that as the set of jump times of Y is a.s. countable, with probability one, for all $s\geq 0$ $\Delta Y_s>0\Rightarrow \Delta T_{-Y_{s-}}=0$, so that one can a.s. describe the set of jump times of $\tau^\star$ as

$$\{s:\Delta Y_s>0\}\cup\{s:\Delta Y_s=0,\Delta T_{-Y_s}\neq 0\}.$$

Define the filtration $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ by saying that $\Theta\in\mathcal{H}_t$ if for every $r\geq 0$, $\Theta\cap\{T_{-Y_t}\leq r\}$ is in $\sigma\{(Y_s,s\leq t);(X_s,s\leq r)\}$. Then let F be a process predictable relative to $\mathcal{H}$, taking values in the nonnegative measurable functionals on $\mathcal{E}\cup\{\Upsilon\}$ and such that $F_t(\Upsilon)=0$, for all t. We now apply the compensation formula to the process of jumps of Y and to the excursion process of $X-I$ away from 0. Taking predictable projections successively w.r.t. $\sigma\{(X_s,s\geq 0)\}$ and $\sigma\{(Y_s,s\geq 0)\}$, we get

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{s\geq 0}F_s(e_s^\star)) &= \mathbb{E}(\sum_{s\geq 0,\Delta Y_s>0} F_s(X^\star_{t+T_{-Y_{s-}}}, t\leq T_{-Y_s}-T_{-Y_{s-}}))\\
&+ \mathbb{E}(\sum_{s\geq 0,\Delta T_{-Y_s}>0} F_s(X^\star_{t+T_{(-Y_s)-}}, t\leq T_{-Y_s}-T_{(-Y_s)-}))\\
&= \mathbb{E}\int_0^\infty ds\int_0^\infty \Gamma(dr)F_s(X^\star_{t+T_{-Y_{s-}}}, t\leq T_{-Y_{s-}+r}-T_{-Y_{s-}})\\
&+ \mathbb{E}(\sum_{u\geq 0,\Delta T_{-u}>0}\mathbf{1}_{\{u\in\mathcal{C}\}}\,F_{Y_u^{-1}}(X^\star_{t+T_{(-u)-}}, t\leq T_{-u}-T_{(-u)-})),
\end{aligned}$$

where $\mathcal{C}=\{Y_s; s\geq 0,\Delta Y_s=0\}$,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty ds\int_0^\infty \Gamma(dr)\mathbb{E}_r(F_s(X_t,t\leq T_0))+\mathbb{E}\int_0^\infty du\,N_0(F_{Y_u^{-1}})\mathbf{1}_{u\in\mathcal{C}}\\
&= \int_0^\infty ds\int_0^\infty N_r(F_s)\Gamma(dr)+\mathbb{E}\int_0^\infty N_0(F_s)\mathbf{1}_{\{\Delta Y_s=0\}}\,dY_s\\
&= \int_0^\infty ds\,(\int_0^\infty N_r(F_s)\Gamma(dr)+\delta N_0(F_s))\\
&= \int_0^\infty ds\,N^\star(F_s),
\end{aligned}$$

and the proof is complete. □

The next section is devoted to the continuous analogue of Proposition 2.1, that is to give a pathwise definition of the height process based on the GCP, and then check that it is distributed as the height process linked to a CBI(ψ, ϕ).

2.4 The height process $H^\star$

2.4.1 Definitions and genealogy-decoding

Consider the GCP(ψ, ϕ) $X^\star$ defined in the last section. This Markov process provides a handy way to code for the genealogy of the continuous analogue of a Galton-Watson tree with immigration. This continuous tree is well understood when considering the successive heights of its individuals. If $\phi \equiv 0$, we recall that this so-called height process H_t can be recovered from the paths of X by measuring the set $\mathcal{J}_t$ of times when X meets or crosses its future infimum on $[0,t]$, thanks to formula (2.6). When $\phi \not\equiv 0$, denote by g_t for each positive t, the last zero of $X^\star$ before time t, that is

$$g_t = \sup(\{s \leq t : X^\star_{s-} = 0\} \cup \{0\}).$$

Then, for before time g_t the future infimum on $[0,t]$ is equal to 0 a.s., we set

$$\mathcal{K}_t = \{s < g_t : X^\star_{s-} = 0\},$$

$$\mathcal{L}_t = \{g_t \leq s \leq t : X^\star_{s-} \leq \inf_{s \leq r \leq t} X^\star_r\},$$

which implies that $\mathcal{J}_t = \{s \leq t : X^\star_{s-} \leq \inf_{s\leq r\leq t} X^\star_r\}$ is the disjoint union of $\mathcal{K}_t$ and $\mathcal{L}_t$. Analogously to the discrete setting, the first set can be considered as the 'time spent' when the exploration process hits the rightmost branch of the tree, that is the height of the last visited immigrant. The measure of $\mathcal{K}_t$ is taken equal to the local time $L^\star_t$ at level 0 at time t of $X^\star$.

Next the (incomplete) excursion $(X^\star_s, g_t \leq s \leq t)$ explores the standard descendant tree starting from the last wave of immigration $\Delta X^\star_{g_t}$, and thus it reduces to the definition of the height process given in [14] when there is no immigration. Indeed, conditional on $\{X^\star_{g_t} = 0\}$, the finite path $(X^\star_s, g_t \leq s \leq t)$ is distributed as $(X_s - I_t, G_t \leq s \leq t)$ under $\mathbb{P}_0$, where

$$G_t = \sup\{s \leq t : X_s = I_t\}.$$

And conditional on $\{X^\star_{g_t} = x, t - g_t = r\}$, the finite path $(X^\star_s, g_t \leq s \leq t)$ is distributed as $(X_s, 0 \leq s \leq r)$ under $\mathbb{P}_x(\cdot \mid T_0 > r)$. We will thus deal with the measure of $\mathcal{L}_t$ given by (2.6), provided the paths of $X^\star$ have infinite variation. In conclusion, we can thus make the following

Definition 2.1 *The height process $H^\star$ is defined as a functional of $X^\star$ by*

$$H^\star_t = L^\star_t + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{g_t}^{t} \mathbf{1}_{\{X^\star_s - \inf_{s \leq r \leq t} X^\star_r < \varepsilon\}} ds.$$

Then $H^\star$ is a progressively measurable process and we can define the random measure $\mathcal{Z}^\star$ by

$$< \mathcal{Z}^\star, h >= \int_0^\infty h(H^\star_s) ds,$$

where h is any nonnegative measurable function with compact support. Moreover, Theorem 4.7 in [15] and the continuity of $L^\star$ entail that $H^\star$ is continuous a.s. if and only if $\int^\infty d\lambda/\psi(\lambda) < \infty$.

We can state the main theorem of this section. It shows that the local time process of $H^\star$, as a function of the space variable, is a CBI(ψ, ϕ).

Theorem 2.4 *Under $I\!P^\star_x$, the random measure $\mathcal{Z}^\star$ has a.s. a càdlàg density $(Z^\star_a, a \geq 0)$, w.r.t. Lebesgue measure on $I\!R_+$, and the process $Z^\star$ is a CBI(ψ, ϕ) starting from x.*

We start with stating a lemma on CBI-processes, which proof is moved to the appendix.

Lemma 2.5 *If h denotes any nonnegative bounded measurable function with compact support on $I\!R_+$, and if Z denotes a CBI(ψ, ϕ) started at x, then*

$$\mathbf{E}_x(\exp[-\int_0^\infty h(a)Z_a da]) = \exp[-xw(0) - \int_0^\infty \phi(w(s))ds],$$

where $(w(t), t \geq 0)$ is the unique nonnegative solution of the integral equation

$$v(t) + \int_t^\infty \psi(v(s))ds = \int_t^\infty h(s)ds, \qquad t \geq 0. \tag{E_h}$$

We are now able to provide the
Proof of Theorem 2.4. We have to establish the equality

$$I\!E^\star_x(\exp[-\int_0^\infty h(H^\star_s)ds]) = \exp[-xw(0) - \int_0^\infty \phi(w(s))ds],$$

where w is the nonnegative solution of (E_h).

The choice we made for the definition of $H^\star$ allows us to use the following two expressions computed in [14, p.141], where V stands for the lifetime of the generic path

$$N_0(1 - \exp(-\int_0^V h(H_u + t)du)) = w(t), \qquad t \geq 0,$$

and

$$N_y(\exp[-\int_0^V h(H_u + t)du]) = \exp(-yw(t)) \qquad t \geq 0, y > 0.$$

We decompose the genealogy-coding process $X^\star$ into its excursions away from 0. Thanks to the two foregoing equations, and using the excursion measure $N^\star$ that defined the process $X^\star$ in Section 2.3, we get

$$I\!E^\star_x(\exp(-\int_0^\infty h(H^\star_s)ds)) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x^\star(\exp(-\int_0^{T_0} h(H_s^\star)ds)\mathbb{E}_0^\star(\exp - \sum_{s\geq 0}\int_{\tau_{s-}^\star}^{\tau_s^\star} h(H_u^\star)du) \\
&= \mathbb{E}_x(\exp(-\int_0^{T_0} h(H_s^\star)ds))\exp\left(-\int_0^\infty ds\, N^\star(1-\exp(-\int_0^V h(s+H_u)du))\right) \\
&= N_x(\exp(-\int_0^V h(H_u)du))\,.\,\exp\left(-\int_0^\infty ds\,\left[\int_0^\infty \Gamma(dr)N_r(1-\exp(-\int_0^V h(s+H_u)du))\right.\right. \\
&+ \left.\left.\delta N_0(1-\exp(-\int_0^V h(s+H_u)du))\right]\right) \\
&= \exp(-xw(0))\exp - \int_0^\infty ds\,[\int_0^\infty \Gamma(dr)(1-\mathrm{e}^{-rw(s)}) + \delta w(s)] \\
&= \exp[-xw(0) - \int_0^\infty \phi(w(s))ds],
\end{aligned}
$$

which is the expected expression. □

Remark. In the case when X is a standard Brownian motion, and $Y = (\delta t, t \geq 0)$, with δ a positive real number, Theorem 2.4 reduces to a theorem by M. Yor and J.F. Le Gall [17]. Writing $\psi(\lambda) = \lambda^2/2$, $\phi(\lambda) = \delta\lambda$, and referring to Theorem 2.3, the GCP(ψ, ϕ) is the Feller Brownian motion $X^\star = (X_t - I_t, t \geq 0)$ with local time at time t at level 0 equal to $-I_t/\delta$.

For $t \geq 0$, consider the finite path $\beta = (X_t^\star - X_{t-s}^\star, 0 \leq s \leq t - g_t)$, with g_t the last zero of $X^\star$ before time t, and let $\overline{\beta}$ be its supremum process. By definition of the height process $H^\star$ of $X^\star$,

$$H_t^\star = \frac{-I_t}{\delta} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t-g_t} \mathbf{1}_{\{\overline{\beta}_s - \beta_s < \varepsilon\}}ds.$$

But β is a Brownian path started at 0 and killed upon reaching the positive real number $X_t - I_t$, hence

$$H_t^\star = \frac{-I_t}{\delta} + 2(X_t - I_t).$$

By Lévy's equivalence theorem, $H^\star$ is distributed as $2\mid X\mid + L^0/\delta$, where L^0 denotes the local time at level 0 of the Brownian motion X, and the theorem of J.F. Le Gall and M. Yor states that

$$(L_\infty^a(2\mid X\mid + L^0/\delta), a \geq 0) \overset{\mathcal{L}}{=} 4^{-1}\mathrm{BESQ}(4\delta),$$

where the notation in the r.h.s. refers to a squared Bessel process of dimension 4δ starting from 0.

In agreement with Theorem 2.4, a BESQ(4δ) is a CBI(ψ, ϕ) up to a multiplicative factor 4, with $\psi(\lambda) = \lambda^2/2$, $\phi(\lambda) = \delta\lambda$.

2.5 An extension of a Ray-Knight-Williams theorem

We show how Lévy processes that drift to $+\infty$ and Lévy processes conditioned to stay positive code the genealogy of certain CBI-processes. In the Brownian case, the genealogy related to the Bessel process of dimension 3 (BES(3)), which is the Brownian motion conditioned to stay positive, is that of a squared Bessel process of dimension 2 ((BESQ(2)), that is a CBI-process with branching mechanism $\lambda \mapsto \lambda^2/2$, and immigration mechanism $\lambda \mapsto \lambda/2$. This result is known as the Ray-Knight-Williams theorem (see [25]).

2.5.1 Main result

We stick to the framework described in Section 2.3. Specifically, $\mathbb{P}_x$ denotes the law of a spectrally positive Lévy process X started at $x \in \mathbb{R}$, with Laplace exponent the convex function

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-\lambda r} - 1 + \lambda r \mathbf{1}_{r<1})\Lambda(dr), \qquad \lambda \geq 0.$$

Denote by ξ the largest root of ψ. If $\xi > 0$, ψ has exactly two roots (0 and ξ), otherwise it has a unique root $\xi = 0$. According as $\psi'(0+) < 0$, $\psi'(0+) = 0$, or $\psi'(0+) > 0$, the paths of X a.s. drift to $+\infty$, oscillate, or drift to $-\infty$, and the associated branching mechanism is supercritical, critical, or subcritical. We assume throughout the rest of this section that $\psi'(0+) \leq 0$, and again that the paths of X have a.s. infinite variation.

We introduce briefly two laws connected with $\mathbb{P}$.

1. The probability measure $\mathbb{P}_x^\uparrow$ is the law of the Lévy process started at $x > 0$ and conditioned to stay positive. When X drifts to $+\infty$, the conditioning is taken in the usual sense, since X stays positive with positive probability. When X oscillates, as X reaches 0 continuously, the process $(X_t \mathbf{1}_{\{t<T_0\}}, t \geq 0)$ is a martingale (T_0 denotes the first hitting time of 0 by X). Then $\mathbb{P}_x^\uparrow$ is defined by local absolute continuity w.r.t. $\mathbb{P}_x$ with density $x^{-1}X_t\mathbf{1}_{\{t<T_0\}}$ on $\mathcal{F}_t$ ($t \geq 0$).
   It is known that the probability measures $\mathbb{P}_x^\uparrow$ converge weakly as $x \to 0+$ to a Markovian law $\mathbb{P}_0^\uparrow$. For more details, see [1], [9],[10].
2. The law $\mathbb{P}^\natural$ is that of a spectrally positive Lévy process with Laplace exponent $\psi^\natural : \lambda \mapsto \psi(\lambda + \xi)$. When $\xi > 0$, the path of X a.s. drifts to $+\infty$, and if I_∞ denotes its overall infimum (Lemma VII.7(i) in [4]), then

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda \mid I_\infty > -x) = \mathbb{P}^\natural(\Lambda), \qquad \Lambda \in \mathcal{F}_t, t > 0.$$

   This process is thus called the Lévy process conditioned to drift to $-\infty$, and for every $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_x^\natural$ is defined by local absolute continuity w.r.t. $\mathbb{P}_x$ with density $\exp(-\xi(X_t - x))$ on $\mathcal{F}_t$ ($t \geq 0$). In the sequel, it will be implicit that the superscript $\natural$ refers to $\mathbb{P}^\natural$. For more details, see [1].

Recall that the definition (2.1) of the functional H makes sense for any Lévy process with no negative jumps. By local absolute continuity, H is still well defined under $\mathbb{P}$, and $\mathbb{P}_x^\uparrow$ for every $x > 0$. We shall see in Lemma 2.7 that the same holds under $\mathbb{P}_0^\uparrow$. In [15], the main result asserts that, provided X does not drift to $+\infty$ under $\mathbb{P}_x$, the occupation measure $\mathcal{Z}_x$ of H defined for any nonnegative h by

$$< \mathcal{Z}_x, h >= \int_0^{T_{-x}} h(H_s)ds,$$

has a density $(Z_a, a \geq 0)$ w.r.t. Lebesgue measure, which is a CB-process started at x. We now state the analogue under $\mathbb{P}^\uparrow$ and under $\mathbb{P}$ when X drifts to $+\infty$.

Theorem 2.6 *Define*

$$\phi(\lambda) = \frac{\psi^\natural(\lambda)}{\lambda+\xi} = \frac{\psi(\lambda+\xi)}{\lambda+\xi}, \qquad \lambda \geq 0.$$

Both $\mathbb{P}$-a.s. and $\mathbb{P}^\uparrow$-a.s., the occupation measure of H has a density w.r.t. Lebesgue measure. We denote by $(Z_a, a \geq 0)$ the càdlàg version of this density.

(i) Let $x \geq 0$. Under $\mathbb{P}_x^\uparrow$, Z is a CBI($\psi^\natural$, ϕ) with initial distribution μ_x, where

1. *The measure μ_0 is the Dirac mass at 0.*
2. *For $x > 0$ and $\xi = 0$, μ_x is the uniform distribution on $(0, x)$.*
3. *For $x > 0$ and $\xi > 0$,*

$$\mu_x(dy) = \frac{\xi e^{-\xi y}}{1-e^{-\xi x}} dy, \qquad 0 < y < x.$$

(ii) Assume the branching mechanism is supercritical ($\psi'(0+) < 0$). Then under $\mathbb{P}$, Z is a CBI($\psi^\natural$, ϕ) with initial distribution the exponential distribution with parameter ξ.

The proof uses the following lemma, which shows the connection with the GCP. When X drifts to $+\infty$, we denote by $\underline{\underline{X}}$ its future infimum

$$\underline{\underline{X}}_t = \inf_{s\geq t} X_s, \qquad t \geq 0.$$

Lemma 2.7 *Under $\mathbb{P}_0^\uparrow$, we may (and will) define the local time $\underline{\underline{L}}$ at 0 for $X - \underline{\underline{X}}$ by*

$$\underline{\underline{L}}_t \stackrel{P}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s - \underline{\underline{X}}_s < \varepsilon\}} ds, \qquad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Then with this normalization of local time,

(i) The process $X - \underline{\underline{X}}$ is a version of the GCP($\psi^\natural$, ϕ).

(ii) The functional H of X is well defined by (2.1) and is equal to the height process $H^\star$ of the GCP $X - \underline{\underline{X}}$.

Before proving the theorem, we establish the link with the Ray-Knight-Williams theorem. In the Brownian case, the law $\mathbb{P}^{\uparrow}$ is that of the Bessel process of dimension 3 (BES(3)). Invoking Pitman's theorem (see [20]), the bivariate process $(X, \underline{\underline{X}})$ has the same law as $(2S - B, S)$, where B stands for a standard Brownian motion, and S for its supremum process. Hence by Lévy's equivalence theorem, $2\underline{\underline{X}}$ is a local time at 0 for $X - \underline{\underline{X}}$. It is then easily checked referring to the remark ending last section that

$$H^{\star}_t = 2\underline{\underline{X}}_t + 2(X - \underline{\underline{X}})_t = 2X_t, \qquad t \geq 0,$$

and by Lemma 2.7(ii), the process H is again (up to a factor 4) a BES(3). Then the Ray-Knight-Williams theorem states that the local time process of a BES(3) is a squared Bessel process of dimension 2 starting from 0 (BESQ(2)), which is (up to a factor 4) a CBI(ψ, ϕ), with $\psi(\lambda) = \lambda^2/2$, and $\phi(\lambda) = \lambda/2$ (see [25, Theorem 65 p.38]).

Proof of Theorem 2.6.

(i) When $x = 0$, the statement follows readily from Lemma 2.7 and Theorem 2.4.

Let $x > 0$. We have the following absolute continuity relationship (see [10])

$$\mathbb{P}^{\uparrow}_x(\Theta) = \mathbb{E}_x(\frac{h(X_t)}{h(x)}, \Theta, t < T_0), \qquad \Theta \in \mathcal{F}_t, x > 0, \tag{2.8}$$

where $h(y) = y$ when $\xi = 0$, and $h(y) = \xi^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\xi y})$ when $\xi > 0$. For any $0 \leq y \leq x$, (2.8) yields

$$\mathbb{P}^{\uparrow}_x(I_\infty \leq y) = \frac{h(y)}{h(x)}\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = \frac{h(y)}{h(x)}\mathrm{e}^{-\xi(x-y)}. \tag{2.9}$$

Hence, with the notation in Theorem 2.6,

$$\mathbb{P}^{\uparrow}_x(x - I_\infty \in dy) = \mu_x(dy).$$

Now a theorem by L. Chaumont ([9, Théorème 2]) states that under $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$, conditional on $I_\infty = y$, the pre-minimum process and the post-minimum process are independent with respective laws $N^{\natural}_{x-y}$ and $\mathbb{P}^{\uparrow}_0$. Hence conditional on $I_\infty = y$, $X - \underline{\underline{X}}$ is the juxtaposition of the killed Lévy process under $\mathbb{P}^{\natural}_{x-y}$ and an independent GCP($\psi^{\natural}$, ϕ) started at 0, it is thus distributed as a GCP($\psi^{\natural}$, ϕ) with initial distribution μ_x. The equality between its height process $H^{\star}$ and the functional H is again straightforward from Lemma 2.7 and an application of Theorem 2.4 completes the proof.

(ii) We work under $\mathbb{P}_0$. When $\xi > 0$, we know that $-I_\infty$ is exponential with parameter ξ. The key is a result of P.W. Millar [18] and J. Bertoin [1, Théorème 2] which states that conditional on $-I_\infty = y$, the pre-minimum process and the post-minimum process are independent with respective laws $N^{\natural}_y$ and $\mathbb{P}^{\uparrow}_0$. We conclude as previously. □

2.5.2 Proof of Lemma 2.7

We first set some definitions and state a general result describing the excursion measure of $X - S$ away from 0 under $\mathbb{P}$.

Recall that since X is a Lévy process with paths of infinite variation, the processes $X-I$ and $X-S$ (I denotes the infimum process, and S the supremum process) are strong Markov processes for which 0 is a regular point. Therefore, one can associate to each an excursion measure away from 0, denoted by N_0 and $\overline{n}$ respectively, for the following normalization of local time. It is well-known that the process $-I$ provides a local time at 0 for $X-I$. The local time L at 0 for $X-S$ is defined (see [14, p.133]) by

$$L_t \stackrel{P}{=} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_s - X_s < \varepsilon\}} ds, \qquad t \geq 0. \tag{2.10}$$

We start with the following lemma concerning $\overline{n}$, and next use it in the proof of Lemma 2.7. Its proof is moved to the appendix.

Lemma 2.8 *We denote the reversed generic excursion by $\hat{\epsilon} = (-\epsilon_{(V-t)-}, 0 \leq t \leq V)$. Then under $\overline{n}$,*

(i) $\overline{n}(\hat{\epsilon}_0 \in dr) = \Lambda(r,\infty)e^{-\xi r}dr$, $r > 0$.

(ii) For $r > 0$, conditional on $\{\hat{\epsilon}_0 = r\}$, $\hat{\epsilon}$ is distributed as X started at r and killed upon reaching 0 under $\mathbb{P}^\natural$.

(iii) $\hat{\overline{n}}(\cdot, \epsilon_0 = 0)$ is proportional to the excursion measure ${N_0}^\natural$ of $X-I$ away from 0 under $\mathbb{P}^\natural$. More precisely, $\hat{\overline{n}}(\cdot, \epsilon_0 = 0) = \beta {N_0}^\natural$.

In other words, $\hat{\overline{n}} = N^\star$, where we set

$$N^\star = \int_0^\infty dr\, e^{-\xi r}\Lambda(r,\infty) N_r^\natural + \beta {N_0}^\natural.$$

We point out that when the Gaussian component β of the Laplace exponent of X vanishes, (i) and (ii) are known results by L.C.G. Rogers [22, Theorem 1] and J. Bertoin [2, Corollary 1], respectively. The previous lemma allows us to prove Lemma 2.7.

Proof of Lemma 2.7. For every $t \geq 0$, define $\underline{g}_t = \sup\{s < t : X_s = S_s\}$, $\underline{d}_t = \inf\{s > t : X_s = S_s\}$, and introduce the process

$$\mathcal{R}(X-S)_t = \begin{cases} (S-X)_{(\underline{d}_t + \underline{g}_t - t)-} & \text{if } \underline{d}_t > \underline{g}_t \\ 0 & \text{if } \underline{d}_t = \underline{g}_t, \end{cases}$$

obtained by reversing each excursion of $S-X$. When X drifts to $+\infty$ under $\mathbb{P}$, Lemme 4 in [1] states that under $\mathbb{P}_0$ the process $(\mathcal{R}(X-S)_t, t \geq 0)$ has the same law as $X - \underline{\underline{X}}$ under $\mathbb{P}_0^\uparrow$. Let us give a short argument to prove that this still holds when X oscillates. Let T be an independent exponential r.v. with parameter $\varepsilon > 0$, and $\rho = \rho(T)$ the first time when X reaches its future infimum on $[0,T]$

$$\rho = \inf\{s \leq T : X_s = \inf_{s \leq r \leq T} X_r\}.$$

The same arguments as those developed in the proof of [1, Lemme 4] show that the processes $(\mathcal{R}(X-S)_t, 0 \leq t < \underline{g}_T)$ and $((X-\underline{\underline{X}})_{\rho+t}, 0 \leq t \leq T-\rho)$ have the same law.

The result then follows from [3, Corollary 3.2] according to which the laws of $(X_{\rho+t}, 0 \le t \le T-\rho)$ converge to $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$ as $\varepsilon \downarrow 0$. Hence under $\mathbb{P}_0$, the process $(\mathcal{R}(X-S)_t, t \ge 0)$ has the same law as $X - \underline{\underline{X}}$ under $\mathbb{P}_0^{\uparrow}$. As a consequence, $\{t : X_t - \underline{\underline{X}}_t = 0\}$ is distributed under $\mathbb{P}_0$ as $\{t : X_t = \overline{S_t}\}$ under $\mathbb{P}_0$. Recall that $\{t : X_t = S_t\}$ is a regenerative set with local time L defined by (2.10), that is

$$L_t = L_{\underline{g}_t} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\underline{g}_t} \mathbf{1}_{\{S_s - X_s < \varepsilon\}} ds = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\underline{g}_t} \mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(S-X)_s < \varepsilon\}} ds, \qquad t \ge 0.$$

Hence $\{t : X_t - \underline{\underline{X}}_t = 0\}$ is a regenerative set and the functional $\underline{\underline{L}}$ defined by (2.7) is its local time. Furthermore, it follows also from this identity in law that the associated excursion measure $\underline{\underline{n}}$ of $X - \underline{\underline{X}}$ away from 0 satisfies

$$\underline{\underline{n}} = \hat{\overline{n}},$$

where $\hat{\overline{n}}$ still denotes the image of the excursion measure of $S-X$ away from 0 (normalized by (2.10)) by the time-reversal map. Hence referring to Lemma 2.8, $\underline{\underline{n}} = N^\star$, with

$$N^\star = \int_0^\infty dr\, \mathrm{e}^{-\xi r} \Lambda(r,\infty) N_r^\natural + \beta N_0{}^\natural.$$

Now notice that after elementary calculation

$$\phi(\lambda) = \beta\lambda + \int_0^\infty dr\, \mathrm{e}^{-\xi r} \Lambda(r,\infty)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda r}), \qquad \lambda \ge 0, \tag{2.11}$$

which ensures that ϕ is the Laplace exponent of a subordinator, and that $N^\star$ is the excursion measure of the GCP($\psi^\natural$, ϕ). The zeros of $X - \underline{\underline{X}}$ are instantaneous, hence the uniqueness of $\mathbb{P}_0^\star$ yields that $X - \underline{\underline{X}}$ is a GCP($\psi^\natural$, ϕ) started at 0.

It thus only remains to show that if $H^\star$ denotes its height process as in Definition 2.1, then $H^\star$ is equal to the r.h.s. in (2.1). For every positive t, split the interval $[0,t]$ into $[0, \underline{\underline{g}}_t) \cup [\underline{\underline{g}}_t, t]$, where

$$\underline{\underline{g}}_t = \sup\{s \le t : X_s = \underline{\underline{X}}_s\}.$$

Then by definition of $H^\star$ and $\underline{\underline{L}}$,

$$H_t^\star = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\underline{\underline{g}}_t} \mathbf{1}_{\{X_s - \underline{\underline{X}}_s < \varepsilon\}} ds + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\underline{\underline{g}}_t}^t \mathbf{1}_{\{(X - \underline{\underline{X}})_s - \inf_{s \le r \le t}(X - \underline{\underline{X}})_r < \varepsilon\}} ds.$$

Note that for any $s \le t$, $\underline{\underline{X}}_s = \min(\underline{\underline{X}}_t, \inf_{s \le r \le t} X_r)$. Then for any $s \in [0, \underline{\underline{g}}_t)$, $\underline{\underline{X}}_s = \inf_{s \le r \le t} X_r$, and for any $s \in [\underline{\underline{g}}_t, t]$, $\underline{\underline{X}}_s = \underline{\underline{X}}_t$. Replacing in the previous equality yields

$$H_t^\star = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\underline{\underline{g}}_t} \mathbf{1}_{\{X_s - \inf_{s \le r \le t} X_r < \varepsilon\}} ds + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\underline{\underline{g}}_t}^t \mathbf{1}_{\{X_s - \underline{\underline{X}}_t - \inf_{s \le r \le t}(X_r - \underline{\underline{X}}_t) < \varepsilon\}} ds,$$

which entails the existence of

$$H_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s - \inf_{s \le r \le t} X_r < \varepsilon\}} ds,$$

and the identity $H = H^\star$. □

Remark. An easy way of building a GCP is to erase the negative excursions of X under $\mathbb{P}$. We consider here that $\psi'(0+) = 0$ (critical case). Set

$$A_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > 0\}} ds, \qquad t \ge 0,$$

$$A_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s < 0\}} ds, \qquad t \ge 0,$$

and α^+, α^- their respective right-inverses. Referring to the remark p.1470 in [2], the excursion ϵ of X away from 0 and $\hat{\epsilon}$ are equally distributed. Hence the excursion ϵ of $X \circ \alpha^+$ is distributed as the reversed excursion $\hat{\epsilon}$ of $X \circ \alpha^-$. But [2, Lemma 2] entails that $X \circ \alpha^-$ and $X - S$ have the same law. In conclusion, the excursion measure of $X \circ \alpha^+$ away from 0 is equal to $\hat{\overline{n}}$, and $X \circ \alpha^+$ is thus a GCP(ψ, ϕ), where

$$\phi(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

2.6 Appendix

2.6.1 Proof of Lemma 2.5

Every solution v of (E_h) is continuous and has its support included in that of h. Hence the range of v is compact and ψ is Lipschitz on this compact set. The uniqueness of the solution then follows from Gronwall's lemma.

Remember that $t \mapsto u_t(\lambda)$ is the unique nonnegative solution of

$$v(t) + \int_0^t \psi(v(s))ds = \lambda, \qquad \lambda \ge 0, t \ge 0,$$

and that

$$\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t}) = \exp[-x u_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds].$$

As a consequence, for any $t_1 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$, $t \mapsto w_t(\lambda_1) = \mathbf{1}_{[0,t_1]}(t) u_{t_1 - t}(\lambda_1)$ is the unique nonnegative solution of

$$v(t) + \int_t^\infty \psi(v(s))ds = \lambda_1 \mathbf{1}_{[0,t_1]}(t), \qquad t \ge 0, \qquad (E'(\lambda_1, t_1))$$

and furthermore

$$\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Z_{t_1}}) = \exp[-xw_0(\lambda_1) - \int_0^{t_1} \phi(w_s(\lambda_1))ds].$$

More generally, we define for $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, and $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ the integral equation

$$v(t) + \int_t^\infty \psi(v(s))ds = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{[0,t_j]}(t), \qquad t \geq 0. \qquad (E'(\lambda_1, t_1, \ldots, \lambda_n, t_n))$$

We argue by induction on n to show that the solution w of $(E'(\lambda_1, t_1, \ldots, \lambda_n, t_n))$ satisfies

$$\mathbf{E}_x(\exp - \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_{t_j}) = \exp[-xw(0) - \int_0^{t_n} \phi(w(s))ds].$$

The first step was just proved in the preceding lines. Now let $n \geq 2$, and assume that the result holds up to the order $n-1$. By the Markov property at t_1,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(\exp - \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_{t_j}) &= \mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Z_{t_1}} \mathbf{E}_{Z_{t_1}}(\exp - \sum_{j=2}^n \lambda_j Z_{t_j - t_1})) \\ &= \mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda_1 Z_{t_1}} \exp[-Z_{t_1} \tilde{w}(0) - \int_0^{t_n - t_1} \phi(\tilde{w}(s))ds]), \end{aligned}$$

where $\tilde{w}$ is the nonnegative solution of $(E'(\lambda_2, t_2 - t_1, \ldots, \lambda_n, t_n - t_1))$.

Thanks to the first step $(n = 1)$,

$$\mathbf{E}_x(\exp - \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_{t_j}) = \exp[-x\bar{w}(0) - \int_0^{t_1} \phi(\bar{w}(s))ds - \int_0^{t_n - t_1} \phi(\tilde{w}(s))ds],$$

where $\bar{w}$ is the nonnegative solution of $(E'(\lambda_1 + \tilde{w}(0), t_1))$. Hence

$$w(t) = \mathbf{1}_{[0,t_1]}(t)\bar{w}(t) + \mathbf{1}_{(t_1,\infty)}(t)\tilde{w}(t - t_1)$$

is the nonnegative solution of $(E'(\lambda_1, t_1, \ldots, \lambda_n, t_n))$ and satisfies

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(\exp - \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_{t_j}) &= \exp[-x\bar{w}(0) - \int_0^{t_1} \phi(\bar{w}(s))ds - \int_{t_1}^{t_n} \phi(\tilde{w}(s - t_1))ds] \\ &= \exp[-xw(0) - \int_0^{t_n} \phi(w(s))ds]. \end{aligned}$$

Now go back to the general case with h some nonnegative bounded measurable function with compact support. The mapping $t \mapsto \int_t^\infty h(s)ds$ is a continuous decreasing function that we may approximate by a pointwise increasing sequence of step functions φ_n

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^n \mathbf{1}_{[0,t_j^n]}(t) \uparrow \int_t^\infty h(s)ds, \qquad t \geq 0.$$

Then it is clear that the associated differential equation $(E'(\lambda_1^n, t_1^n, \ldots, \lambda_n^n, t_n^n))$ has a unique nonnegative solution w_n satisfying

$$0 \leq w_n(t) \leq \int_t^\infty h(s)ds, \qquad t \geq 0.$$

In particular, the $(w_n, n \geq 0)$ are uniformly bounded and have a common compact support. Applying Gronwall's lemma to the increments $w_{n+p}(t) - w_n(t)$ for each $t \geq 0$, we deduce that the sequence $(w_n(t), n \geq 0)$ has a limit, say $w(t)$, as $n \to \infty$. It follows from the dominated convergence theorem that $\int_t^\infty \psi(w_n(s))ds \to \int_t^\infty \psi(w(s))ds$, that $\int_t^\infty \phi(w_n(s))ds \to \int_t^\infty \phi(w(s))ds$, and that

$$\mathbf{E}_x(\exp - \sum_{j=1}^n \lambda_j^n Z_{t_j^n}) \to \mathbf{E}_x(\exp - \int_0^\infty h(a)Z_a da), \text{ as } n \to \infty.$$

Hence w satisfies (E_h), which provides a proof for the existence of solutions, moreover

$$\mathbf{E}_x(\exp[- \int_0^\infty h(a)Z_a da]) = \exp[-xw(0) - \int_0^\infty \phi(w(s))ds],$$

and the proof is complete. □

2.6.2 Proof of Lemma 2.8

We first give some further details about $\mathbb{P}$, and state two preliminary lemmas.

The scale function is defined as the unique continuous function $W : [0, \infty) \to [0, \infty)$ with Laplace transform

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qx} W(x)dx = \frac{1}{\psi(q)}, \qquad q > \xi.$$

It satisfies for any $0 \leq x \leq y$

$$\mathbb{P}_x(T_0 < T_{[y,+\infty)}) = \frac{W(y-x)}{W(y)}. \tag{12}$$

We introduce also the positive increasing mappings $W^{(\lambda)}$ on $(0, \infty)$ specified by their Laplace transforms

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qx} dW^{(\lambda)}(x) = \frac{q}{\psi(q) - \lambda}, \qquad \psi(q) > \lambda \geq 0.$$

In particular, $W^{(0)} = W$. Since when $\beta > 0$, $\psi(q) \sim \beta q^2$ as $q \to \infty$, it follows from a Tauberian theorem that for any $\lambda \geq 0$,

$$W^{(\lambda)}(x) \sim \beta^{-1} x, \qquad \text{as } x \to 0^+. \tag{13}$$

We stress that $\overline{n}$ is normalized by (2.10). Set L^{-1} the right-inverse of L, and ψ^{-1} the inverse of $\psi_{|[\xi,\infty)}$ (ψ is strictly increasing on $[\xi,\infty)$ with $\psi(\xi)=0$). Referring to [14, p.133] and [7], $((L_t^{-1}, S_{L_t^{-1}}), t \geq 0)$ is a bivariate subordinator with Laplace exponent κ satisfying

$$\kappa(\lambda,0) = \frac{\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)}, \qquad \kappa(0,\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \xi}, \qquad \lambda \geq 0.$$

Lemma 2.9 *Let $m(\epsilon)$ stand for the supremum of the generic excursion ϵ. Then*

$$\overline{n}(m \geq x) = \frac{1}{W(x)}, \qquad x > 0.$$

Proof. For every $0 < x \leq y$, it follows from the strong Markov property applied at T_{-x} under $\overline{n}$ that

$$\frac{\hat{\overline{n}}(m \geq y)}{\hat{\overline{n}}(m \geq x)} = \mathbb{P}_{-x}(T_{-y} < T_{[0,\infty)}).$$

Thanks to (12), there is some positive constant K such that

$$\overline{n}(m \geq x) = \frac{K}{W(x)}, \qquad x > 0.$$

In order to compute K, we recall that for every $\lambda > 0$, if $\mathbf{e}_\lambda$ is an independent exponential r.v. with parameter λ, then

$$\overline{n}(V > \mathbf{e}_\lambda) = \kappa(\lambda, 0) = \frac{\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)}. \tag{14}$$

But on the other hand,

$$\begin{aligned} \overline{n}(V > \mathbf{e}_\lambda) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{n}(m \geq \varepsilon)\mathbb{P}_{-\varepsilon}(T_{[0,\infty)} > \mathbf{e}_\lambda) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{K}{W(\varepsilon)} \mathbb{P}_0(S_{\mathbf{e}_\lambda} < \varepsilon). \end{aligned}$$

Referring for example to [5, p.158],

$$\mathbb{P}_0(S_{\mathbf{e}_\lambda} \in dx) = \frac{\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)} W^{(\lambda)}(dx) - \lambda W^{(\lambda)}(x)dx.$$

Hence thanks to (13)

$$\overline{n}(V > \mathbf{e}_\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{K}{W^{(0)}(\varepsilon)} \frac{\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)} W^{(\lambda)}(\varepsilon) = K \frac{\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)},$$

and we conclude from (14) that $K = 1$. $\square$

Lemma 2.10 *Let σ_ε stand for the last passage time below ε*

$$\sigma_\varepsilon \doteq \sup\{s \geq 0 : X_s < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Then for any $t > 0$ and any bounded $\mathcal{F}_t$-measurable Θ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} I\!P_0^\uparrow(\Theta, t < \sigma_\varepsilon) = N_0{}^\natural(\Theta, t < V).$$

Proof. Thanks to (2.9), we know that for any $0 \leq \varepsilon \leq x$,

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(I_\infty \leq \varepsilon) = \frac{h(\varepsilon)}{h(x)} \mathrm{e}^{-\xi(x-\varepsilon)}.$$

Since $h(\varepsilon) \sim \varepsilon$ as $\varepsilon \to 0+$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}_0^\uparrow(\Theta, t < \sigma_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}_0^\uparrow(\Theta, I_\infty \circ \theta_t \leq \varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}_0^\uparrow(\Theta, \frac{h(\varepsilon)}{h(X_t)} \mathrm{e}^{-\xi(X_t - \varepsilon)}) \\
&= N_0(\Theta, t < V, \mathrm{e}^{-\xi X_t}),
\end{aligned}$$

the last equality stemming from the following absolute continuity relationship (see [10])

$$\mathbb{P}_0^\uparrow(\Theta) = N_0(h(X_t), \Theta, t < V), \qquad \Theta \in \mathcal{F}_t. \tag{15}$$

According to Lemma VII.7(ii) in [4], the law of X killed upon reaching $-x$ ($x > 0$), is the same under $\mathbb{P}_0^\natural$ as under $\mathbb{P}_0(\cdot \mid T_{-x} < \infty)$, and it is easy to deduce that $N_0{}^\natural = N_0(\cdot, V < \infty)$. Hence we conclude as follows thanks to the Markov property under N_0

$$\begin{aligned}
N_0{}^\natural(\Theta, t < V) &= N_0(\Theta, t < V, \mathbb{P}_{X_t}(I_\infty < 0)) \\
&= N_0(\Theta, t < V, \mathrm{e}^{-\xi X_t}),
\end{aligned}$$

and the proof is complete. □

We now are able to complete the
Proof of Lemma 2.8.

(i) According to Theorem 1 in [22], if $\mathbf{e}_\lambda$ stands for some independent exponential r.v. with parameter $\lambda > 0$, then

$$\overline{n}(\hat{\epsilon}_0 \in dr, V < \mathbf{e}_\lambda) = \Lambda(r, \infty) \frac{\kappa(\lambda, 0)}{\lambda} \mathbb{P}_0(-I_{\mathbf{e}_\lambda} \in dr), \qquad r > 0.$$

But $-I_{\mathbf{e}_\lambda}$ has an exponential distribution with parameter $\psi^{-1}(\lambda)$ under $\mathbb{P}_0$, thus recalling that $\kappa(\lambda, 0) = \lambda/\psi^{-1}(\lambda)$, and $\psi^{-1}(0) = \xi$, letting $\lambda \to 0+$ yields

$$\overline{n}(\hat{\epsilon}_0 \in dr) = \Lambda(r, \infty) \mathrm{e}^{-\xi r} dr, \qquad r > 0.$$

(ii) When $\beta = 0$, $\hat{\overline{n}}(\epsilon_0 = 0) = 0$ and Corollary 1 in [2] asserts that for any positive r, under $\hat{\overline{n}}(\cdot \mid \epsilon_0 = r)$, ϵ has the law of X killed upon reaching 0 under $\mathbb{P}_r(\cdot \mid T_0 < \infty)$. The result follows once again from Lemma VII.7(ii) in [4], that is $\hat{\overline{n}}(\cdot \mid \epsilon_0 = r) = N_r^\natural$. When $\beta > 0$, $\hat{\overline{n}}(\epsilon_0 = 0) = \infty$ but the arguments developed in the prooves of Lemma 1 and Corollary 1 in [2] still apply. Hence we have

$$\hat{\overline{n}}(\cdot, \epsilon_0 \neq 0) = \int_{(0,\infty)} \hat{\overline{n}}(\epsilon_0 \in dr) N_r^\natural.$$

(iii) We have to prove that when $\beta > 0$, $\nu = \beta {N_0}^\natural$, where we wrote

$$\nu = \hat{\overline{n}}(\cdot, \epsilon_0 = 0).$$

According to Theorem 4.1 in [10], the law of $(-X_{(T_{[0,\infty)}-t)-}, t \leq T_{[0,\infty)})$ under $\mathbb{P}_{-\varepsilon}(\cdot \mid X_{T_{[0,\infty)}} = 0)$ is $\mathbb{P}_0^\uparrow \circ \mathrm{k}_{\sigma_\varepsilon}$, where k stands for the killing operator. Hence thanks to Lemma 2.9,

$$\begin{aligned}
\nu(\Theta, t < V) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\overline{n}}(\Theta, t < V, \epsilon_0 = 0, m \geq \varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\overline{n}}(m \geq \varepsilon) \mathbb{P}_0^\uparrow \circ \mathrm{k}_{\sigma_\varepsilon}(\Theta, t < V) \mathbb{P}_{-\varepsilon}(X_{T_{[0,\infty)}} = 0) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{W(\varepsilon)} \mathbb{P}_0^\uparrow(\Theta, t < \sigma_\varepsilon) \mathbb{P}_0(X_{T_{[\varepsilon,\infty)}} = \varepsilon).
\end{aligned}$$

Now

$$\mathbb{P}_0(X_{T_{[\varepsilon,\infty)}} = \varepsilon) = \mathbb{P}_0(\exists t : S_{L_t^{-1}} = \varepsilon),$$

and $(S_{L_t^{-1}}, t \geq 0)$, is a subordinator with Laplace exponent $\lambda \mapsto \kappa(0, \lambda) = \psi(\lambda)/(\lambda - \xi)$. Setting $\pi(dr) = \int_0^\infty dy\, \mathrm{e}^{-\xi y} \Lambda(y + dr)$, an easy calculation provides the identity

$$\frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \xi} = \beta\lambda + \int_0^\infty \pi(dr)\,(1 - \mathrm{e}^{-\lambda r}), \qquad \lambda > 0.$$

It is known that (such) a subordinator with positive drift hits a fixed point ε with positive probability $v(\varepsilon)$, and that $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} v(\varepsilon) = 1$ (see Theorem III.5 in [4]). Hence we conclude thanks to Lemma 2.10 and the estimate (13). $\square$

Bibliographie

[1] Bertoin J. (1991)
Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum. Ann. Inst. H. Poincaré **27** 537-547.

[2] Bertoin J. (1992)
An extension of Pitman's theorem for spectrally positive Lévy processes. Ann. Probab. **20** 1464-1483.

[3] Bertoin J. (1993)
Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes. Stoch. Proc. Appl. **47** 17-35.

[4] Bertoin J. (1996)
Lévy processes. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Bertoin J. (1997)
Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval. Ann. Appl. Prob. **7** 156-169.

[6] Bertoin J., Le Gall J.F. (1999)
The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. Prépublication $n°$493 du Laboratoire de Probabilités de l'U. P. et M. Curie.

[7] Bingham N.H. (1975)
Fluctuation theory in continuous time. Adv. in Appl. Probab. **7** 705-766.

[8] Blumenthal R.M. (1992)
Excursions of Markov processes. Birkhäuser, Boston.

[9] Chaumont L. (1994)
Sur certains processus de Lévy conditionnés à rester positifs. Stochastics Stoch. Reports **47** 1-20.

[10] Chaumont L. (1996)
Conditionings and path decompositions for Lévy processes. Stoch. Proc. Appl. **64** 39-54.

[11] Itô K. (1971)
Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. Sixth Berkeley Symp. vol.III 225-240. U. of California Press.

[12] Itô K., McKean H.P.Jr (1974)
Diffusion Processes and their Sample Paths. Springer-Verlag, New York.

[13] Kawazu K., Watanabe S. (1971)
Branching processes with immigration and related limit theorems. Teor. Verojanost i Primenen **16** 34-51.

[14] Le Gall J.F. (1999)
Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser.

[15] Le Gall J.F., Le Jan Y. (1998)
Branching processes in Lévy processes : the exploration process. Ann. Probab. **26** 213-252.

[16] Le Gall J.F., Le Jan Y. (1998)
Branching processes in Lévy processes : Laplace functionals of snakes and Lévy processes. Ann. Probab. **26** 1407-1432.

[17] Le Gall J.F., Yor M. (1986)
Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. CRAS (Série I) vol 103, 73-76.

[18] Millar P.W. (1977)
Zero-0ne Laws and the Minimum of a Markov Process. Trans. Amer. Math. Soc. **226** 365-391.

[19] Pinsky M.A. (1972)
Limit theorems for continuous state branching processes with immigration. Bull. Amer. Math. Soc. **78** 242-244.

[20] Pitman J.W. (1975)
One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. in Appl. Probab. **7** 511-526.

[21] Rogers L.C.G. (1983)
Itô excursion theory via resolvents. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **63** 237-255.

[22] Rogers L.C.G. (1984)
A new identity for real Lévy processes. Ann. Inst. H. Poincaré **20** 21-34.

[23] Salisbury T.S. (1986)
On the Itô excursion process. Probab. Theory Relat. Fields **73** 319-350.

[24] Salisbury T.S. (1986)
Construction of right processes from excursions. Probab. Theory Relat. Fields **73** 351-367.

[25] Williams D. (1979)
Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 1 : Foundations. John Wiley and Sons, New York.

Chapitre 3

Le processus de branchement conditionné à ne jamais s'éteindre

Abstract. We introduce the branching process conditioned to be never extinct, or Q-process, which can be viewed as the initial branching process with some added immigration. In the stable case, the Q-process solves a SDE with a drift term to be seen as the instantaneous immigration.

AMS subject classification (2000) : Primary 60J80. Secondary 60K05.
Key words : Continuous-state branching process - Immigration - Lévy process - h-transform - Stochastic differential equations.

3.1 Introduction

We study continuous-state branching processes (CB), which are the continuous analogue of Galton-Watson processes (see [2], [4]). A CB-process Z is a strong Markov process with nonnegative values, and 0 as absorbing state. Even when Z is a.s. absorbed (which impedes the supercritical case), one can condition it to non-extinction in the sense of a h-transform (martingale change of measure). The process conditioned to non-extinction is called Q-process as in the discrete setting (see [1]) and can be viewed as a CB-process with immigration (CBI).
In order to understand better how the immigration occurs (see also [6]), we study the stable case (i.e. corresponding to the branching mechanism $\psi : \lambda \mapsto \lambda^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$). Thanks to Lamperti's time-change, we prove that the CB-process Z then solves the following stochastic differential equation

$$dZ_t = Z_{t-}^{1/\alpha} dX_t,$$

where X is a spectrally positive Lévy process with Laplace exponent ψ, and that the Q-process solves

$$dZ_t = Z_{t-}^{1/\alpha} dX_t + d\sigma_t,$$

where σ is a subordinator with Laplace exponent ψ' independent of X, which may then be seen as the instantaneous immigration.
The next section recalls some facts about the Q-process in discrete time and reviews results concerning Lévy processes and CB-processes. In the third section, we introduce the Q-process in continuous time and study its main properties. The last section is dedicated to the stable case and the SDE's solved by the Q-process and the initial CB-process.

3.2 Preliminaries

The first subsection summarizes some known properties of the Q-process in the discrete setting. The second subsection provides some useful tools and definitions concerning Lévy processes and branching processes in the continuous setting.

3.2.1 The Q-process in discrete time

All the results mentioned in this subsection can be found in [1, pp.56-59].

Consider $(Z_n, n \geq 0)$ a time-discrete branching process (or Galton-Watson process) with offspring distribution $(\nu(k), k \geq 0)$ and associated probability generating function f, shorter called a DB(f). We call m the mean of ν. Assume that $m = f'(1) \leq 1$ (critical or subcritical case) and that $\nu(0)\nu(1) \neq 0$. It is well-known that

$$T \doteq \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$$

is then a.s. finite. We state the following elementary results without proof.

- The conditional probabilities $\mathbf{P}(\cdot \mid T \geq k)$ converge as $k \to \infty$ in the sense of finite-dimensional distributions to an honest probability measure $\mathbf{P}^\uparrow$. The probability $\mathbf{P}^\uparrow$ defines a new homogeneous Markov chain, denoted by $Z^\uparrow$ and called Q-process. The Q-process lives in the positive integers and its n-fold transition function is given by
$$\mathbf{P}(Z_n^\uparrow = j \mid Z_0^\uparrow = i) = P_{ij}(n)\frac{j}{i}m^{-n}, \qquad i, j \geq 1, \tag{1}$$
where $P_{ij}(n)$ denotes that of the initial Galton-Watson process.
- The Q-process has the following properties
(i) if $m = 1$, then it is transient.
(ii) if $m < 1$, then it is positive-recurrent iff
$$\sum_{k\geq 1}(k \log k)\nu(k) < \infty.$$
(iii) In the positive-recurrent case, the stationary measure for the Q-process is $(k\pi_k, k \geq 1)$, where π is the unique probability measure on $\mathbb{N}^\star$ such that
$$\sum_{k\geq 1} \pi_k P_{kj}(1) = m^{-1}\pi_j, \qquad j \geq 1.$$

3.2.2 Branching processes, Lévy processes, and immigration

A continuous-state branching process (CB) is a strong Markov process Z with values in $[0,\infty]$, 0 and ∞ being absorbing states. It is characterized by its branching mechanism function ψ and enjoys the following branching property. The sum of two independent CB(ψ) starting respectively from x and y, is a CB(ψ) starting from $x+y$. CB-processes are the analogue of (Galton-Watson) discrete-branching processes (DB) in continuous time and continuous state-space. Recall that we only consider the critical and subcritical cases so the branching mechanism function ψ is the Laplace exponent of a spectrally positive Lévy process that does not drift to $+\infty$. It is specified by the Lévy-Khinchin formula

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-\lambda r} - 1 + \lambda r)\Lambda(dr), \qquad \lambda \geq 0,$$

where $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ denotes the Gaussian coefficient, and the Lévy measure Λ is a measure on $(0,\infty)$ such that $\int_0^\infty (r^2 \wedge r)\Lambda(dr) < \infty$.

Throughout this paper, we will denote by $X = (X_t, t \geq 0)$ a Lévy process with Laplace exponent ψ and $Z = (Z_t, t \geq 0)$ a CB(ψ). We also let $\mathbb{P}_y$ stand for the law of X started at $y \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{P}_x$ that of Z started at $x \geq 0$. Then

$$\mathbb{E}_y(\exp -\lambda X_t) = \mathbb{E}_0(\exp -\lambda(X_t + y)) = \exp(-\lambda y + t\psi(\lambda)), \qquad \lambda \geq 0, t \geq 0,$$

and

$$\mathbf{E}_x(\exp -\lambda Z_t) = \exp(-x u_t(\lambda)), \qquad \lambda \geq 0, t \geq 0,$$

where $t \mapsto u_t(\lambda)$ is the unique nonnegative solution of the integral equation

$$v(t) + \int_0^t \psi(v(s))ds = \lambda, \qquad \lambda \geq 0, t \geq 0. \tag{2}$$

There is another link between the law $\mathbf{P}$ of the branching process Z and the law $\mathbb{P} \circ \mathrm{k}_{T_0}$ of the Lévy process killed upon hitting 0, called Lamperti's transform (see [7]). To avoid confusions, set

$$T_0 \doteq \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\},$$

and

$$T \doteq \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}.$$

Introduce

$$C_t = \int_0^t Z_s\, ds, \qquad t \geq 0.$$

If $(\gamma_t, t \geq 0)$ denotes the right inverse of C

$$\gamma_t = \inf\{s \geq 0 : C_s > t\} \wedge T, \qquad t \geq 0,$$

then for $x > 0$, the process $Z \circ \gamma$ under $\mathbf{P}_x$ has the same law as X started at x and stopped at T_0.

In this direction, we stress that the law $\mathbb{P}^\uparrow$ of X conditioned to stay positive is already well-known (see [3]). It is submarkovian in the subcritical case ($\psi'(0+) > 0$), so we focus on the critical case ($\psi'(0+) = 0$). This probability measure is then defined by the following absolute continuity relation

$$\mathbb{P}^\uparrow_x(\Theta) = \mathbb{E}_x(\frac{X_t}{x}, \Theta, t < T_0), \qquad t \geq 0, \Theta \in \mathcal{F}_t.$$

Moreover, the measures $(\mathbb{P}^\uparrow_x)$ converge weakly as $x \downarrow 0+$ to a probability measure denoted by $\mathbb{P}^\uparrow_0$.

We end this subsection with some facts about processes with immigration. Consider a Galton-Watson tree and add independently of the tree at each generation n a random number Y_n of particles, where the Y_i's are i.i.d. Give to these immigrating particles independent Galton-Watson descendant trees with the same offspring distribution. Then the process that associates to every integer n the number of particles of the n-th generation of the modified tree is a Markov chain called a discrete-branching process with immigration. If f and g stand for the probability generating functions of the offspring distribution, and of Y_0, respectively, we denote this Markov chain by DBI(f, g). It is then straightforward that

$$\mathbf{E}_i(s^{Z_1}) = \sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i) s^j = g(s) f(s)^i, \qquad i \geq 0.$$

Remark. Go back to the discrete Q-process. Recalling (1), and differentiating the last equality w.r.t. s when there is no immigration ($g \equiv 1$) yields

$$\sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(Z_1^\uparrow = j \mid Z_0^\uparrow = i) s^j = \sum_{j\geq 0} \mathbf{P}(Z_1 = j \mid Z_0 = i) \frac{j}{i} m^{-1} s^j = \frac{s f'(s)}{m} f(s)^{i-1}.$$

The foregoing equality provides a useful construction for a Q-process tree, called size-biased tree (see [9]). At each generation, a particle is marked. Give to the others independent Galton-Watson descendant trees with offspring distribution ν, which is (sub)critical. Give to the marked particle k children with probability $\mu(k)$, where

$$\mu(k) = \frac{k\nu(k)}{m}, \qquad k \geq 1.$$

Then mark one of these children at random.

This construction shows that the Q-process tree contains one infinite branch and one only, that of the marked particles, and that $(Z_n^\uparrow - 1, n \geq 0)$ is a DBI(f, f'/m) (by construction, $Z_n^\uparrow$ is the total number of particles belonging to generation n. We thus have to remove the marked particle at each generation to recover the DBI-process).

Note that $\sum_{k=0}^n Y_k$ is the total number of immigrants up until generation n. In the continuous setting, the role of the renewal process $(\sum_{k=0}^n Y_k, n \geq 0)$ is played by a subordinator with Laplace exponent denoted by ϕ. The analogue of the DBI is then called CBI(ψ, ϕ) and is characterized by its Laplace transform

$$\mathbf{E}_x(\exp -\lambda Z_t) = \exp[-x u_t(\lambda) - \int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds], \qquad x \geq 0, t \geq 0,$$

where $t \mapsto u_t(\lambda)$ is again the unique nonnegative solution of (2).

3.3 The Q-process in the continuous setting

3.3.1 Existence

Recall that $T = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}$, where Z is a CB(ψ). As we assumed that ψ is not the Laplace exponent of a subordinator (X does not drift to $+\infty$), the following equivalence holds [4]

$$\int^{\infty} \frac{d\lambda}{\psi(\lambda)} \text{ diverges } \Leftrightarrow T = \infty \quad \text{a.s.},$$

hence we will assume that

$$\int^{\infty} \frac{d\lambda}{\psi(\lambda)} < \infty.$$

In particular, the sample-path of Z has infinite variation a.s. Moreover, the (sub)critical assumption ($\psi'(0+) \geq 0$) implies that

$$T < \infty \quad \text{a.s.}$$

From now on, we will write ρ instead of $\psi'(0+)$ (recall that $\rho \geq 0$). The next proposition states the existence in some special sense of the branching process conditioned to be never extinct, or Q-process.

Proposition 3.1 *Let $x > 0$.*

(i) The conditional laws $\mathbf{P}_x(\cdot \mid T > t)$ converge as $t \to \infty$ to a limit denoted by $\mathbf{P}_x^{\uparrow}$, in the sense that for any $t \geq 0$ and $\Theta \in \mathcal{F}_t$,

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{P}_x(\Theta \mid T > s) = \mathbf{P}_x^{\uparrow}(\Theta).$$

(ii) The probability measures $\mathbf{P}^{\uparrow}$ can be expressed as h-transforms of $\mathbf{P}$ based on the $(\mathbf{P}, (\mathcal{F}_t))$-martingale

$$D_t = Z_t e^{\rho t},$$

that is

$$d\mathbf{P}^{\uparrow}_{x|\mathcal{F}_t} = \frac{D_t}{x} \,.\, d\mathbf{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

(iii) The process $Z^{\uparrow}$ which has law $\mathbf{P}_x^{\uparrow}$ is a CBI(ψ, ϕ) started at x, where ϕ is (the Laplace transform of a subordinator) defined by

$$\phi(\lambda) = \psi'(\lambda) - \psi'(0+), \qquad \lambda \geq 0.$$

Proof. Put

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{d\lambda}{\psi(\lambda)}, \qquad t > 0.$$

As the mapping $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ is bijective, we write φ for the inverse mapping. Then for every $x, t > 0$ (see [4]),

$$\mathbf{P}_x(T < t) = \exp(-x\varphi(t)).$$

We start with proving the following convergence

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s)}{\varphi(t+s)} = \mathrm{e}^{\rho t}, \qquad t \geq 0.$$

On the one hand, we have

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(t+s)}^{\varphi(s)} \frac{\rho d\lambda}{\psi(\lambda)} &= \rho(f(\varphi(t+s)) - f(\varphi(s))) \\ &= \rho t, \end{aligned}$$

and on the other hand,

$$\log \frac{\varphi(s)}{\varphi(t+s)} = \int_{\varphi(t+s)}^{\varphi(s)} \frac{d\lambda}{\lambda} \sim \int_{\varphi(t+s)}^{\varphi(s)} \frac{\rho d\lambda}{\psi(\lambda)} \qquad \text{as } s \to \infty,$$

which yields the result when $\rho > 0$.

If $\rho = 0$, as $s \to \infty$,

$$\log \frac{\varphi(s)}{\varphi(t+s)} = o\left(\int_{\varphi(t+s)}^{\varphi(s)} \frac{d\lambda}{\psi(\lambda)}\right) = o(1),$$

hence

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s)}{\varphi(t+s)} = 1.$$

(i) Now let $x \geq 0, s, t > 0, \Theta \in \mathcal{F}_t$.

As a consequence of the foregoing convergence,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1 - \exp(-Z_t\varphi(s))}{1 - \exp(-x\varphi(t+s))} = \frac{Z_t}{x}\mathrm{e}^{\rho t} \qquad \text{a.s.}$$

Moreover,

$$0 \leq \frac{1 - \exp(-Z_t\varphi(s))}{1 - \exp(-x\varphi(t+s))} \leq \frac{Z_t\varphi(s)}{1 - \exp(-x\varphi(t+s))} \leq 2\frac{Z_t}{x}\mathrm{e}^{\rho t},$$

for any s greater than some bound chosen independently of $Z_t(\omega)$. Hence by dominated convergence,

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \mathbf{P}_x(\Theta \mid T > t+s) &= \lim_{s\to\infty} \mathbf{E}_x(\frac{\mathbf{P}_{Z_t}(T > s)}{\mathbf{P}_x(T > t+s)}, \Theta, T > t) \\
&= \lim_{s\to\infty} \mathbf{E}_x(\frac{1-\exp(-Z_t\varphi(s))}{1-\exp(-x\varphi(t+s))}, \Theta, T > t) \\
&= \mathbf{E}_x(\frac{Z_t}{x}\mathrm{e}^{\rho t}, \Theta).
\end{aligned}
$$

(ii) It is well-known that

$$\mathbf{E}_x(Z_t) = x\mathrm{e}^{-\rho t},$$

and the fact that D is a martingale follows from the simple Markov property.

(iii) Let us compute the Laplace transform of $Z_t^{\uparrow}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t^{\uparrow}}) &= \mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t}\frac{Z_t}{x}\mathrm{e}^{\rho t}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial\lambda}(\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t}))\frac{\mathrm{e}^{\rho t}}{x} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}(u_t(\lambda))\mathrm{e}^{-xu_t(\lambda)}\mathrm{e}^{\rho t}.
\end{aligned}
$$

Now it is easy to prove thanks to (2), that

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(u_t(\lambda)) = \exp[-\int_0^t \psi'(u_s(\lambda))ds], \qquad \lambda, t \geq 0,$$

and then

$$\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\lambda Z_t^{\uparrow}}) = \exp(-xu_t(\lambda))\exp(-\int_0^t \phi(u_s(\lambda))ds),$$

where

$$\phi(\lambda) = \psi'(\lambda) - \rho.$$

It is easy to check that ϕ is the Laplace transform of a subordinator since by differentiating the Lévy-Khinchin formula for ψ, we obtain

$$\phi(\lambda) = 2\beta\lambda + \int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-\lambda r})r\Lambda(dr), \qquad \lambda \geq 0,$$

and the proof is complete. □

3.3.2 Properties

We investigate the asymptotic properties of the Q-process $Z^\uparrow$ defined in the previous subsection. Recall that $\mathbf{P}^\uparrow$ denotes the law of the Q-process, whereas $\mathbb{P}^\uparrow$ is that of the Lévy process conditioned to stay positive.

Proposition 3.2 *(i) (Lamperti's transform) If $\rho = 0$, then*

$$\lim_{t\to\infty} Z_t^\uparrow = +\infty \qquad a.s.$$

Moreover, set

$$C_t = \int_0^t Z_s^\uparrow \, ds, \qquad t \geq 0,$$

and let γ be its right inverse, then for $x > 0$, the process $Z^\uparrow \circ \gamma$ under $\mathbf{P}_x$ has law $\mathbb{P}_x^\uparrow$.

(ii) If $\rho > 0$, the following dichotomy holds

$$\int^\infty r \log r \, \Lambda(dr) = \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} Z_t^\uparrow \overset{P}{=} +\infty$$

$$\int^\infty r \log r \, \Lambda(dr) < \infty \Rightarrow \int_0 (\frac{1}{\rho\lambda} - \frac{1}{\psi(\lambda)}) d\lambda < \infty,$$

and $Z_t^\uparrow$ converges in distribution as $t \to \infty$ to a positive r.v. $Z_\infty^\uparrow$ with Laplace transform

$$\mathbf{E}(e^{-\theta Z_\infty^\uparrow}) = \frac{\rho\theta}{\psi(\theta)} \exp[-\int_0^\theta (\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho}{\psi(\lambda)}) d\lambda], \qquad \theta > 0.$$

Proof. (ii) First observe that

$$\psi(\lambda) \sim \rho\lambda, \qquad \text{as } \lambda \downarrow 0.$$

We use the expression for the Laplace transform of $Z_t^\uparrow$ computed in (iii), and the well-known fact that

$$\int_{u_t(\theta)}^\theta \frac{d\lambda}{\psi(\lambda)} = t, \qquad t, \theta \geq 0.$$

In particular,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(u_t(\theta)) = \frac{\psi(u_t(\theta))}{\psi(\theta)},$$

and

$$\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\theta Z_t^\uparrow}) = \exp(-x u_t(\theta)) \exp(\rho t) \frac{\psi(u_t(\theta))}{\psi(\theta)}.$$

Now by convexity of ψ,

$$0 \leq \int_{u_t(\theta)}^\theta (\frac{1}{\rho\lambda} - \frac{1}{\psi(\lambda)}) d\lambda = \rho^{-1} \log(\frac{\theta}{u_t(\theta) \exp(\rho t)}).$$

See [4, p.676] to be convinced that

$$\int^{\infty} r\log r\,\Lambda(dr)=\infty \Leftrightarrow \int_0 (\frac{1}{\rho\lambda}-\frac{1}{\psi(\lambda)})d\lambda=\infty.$$

In this case, for any $\theta>0$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\theta Z_t^{\uparrow}})=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(u_t(\theta))}{\psi(\theta)}\exp(-xu_t(\theta))\exp(\rho t)=0.$$

In the opposite case,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_x(\mathrm{e}^{-\theta Z_t^{\uparrow}}) &= \lim_{t\to\infty}u_t(\theta)\frac{\rho}{\psi(\theta)}\exp(-xu_t(\theta))\exp(\rho t)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\rho\theta}{\psi(\theta)}\exp[-\int_{u_t(\theta)}^{\theta}(\frac{1}{\lambda}-\frac{\rho}{\psi(\lambda)})d\lambda]\\ &= \frac{\rho\theta}{\psi(\theta)}\exp[-\int_0^{\theta}(\frac{1}{\lambda}-\frac{\rho}{\psi(\lambda)})d\lambda],\end{aligned}$$

and the proof of (ii) is complete.

(i) For any nonnegative measurable functional F, $x>0$, $t\geq 0$, since γ_t is a stopping time for the natural filtration of Z,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x^{\uparrow}(F(Z_{\gamma_s},s\leq t)) &= \mathbf{E}_x(F(Z_{\gamma_s},s\leq t)x^{-1}Z_{\gamma_t},\gamma_t<T)\\ &= \mathbb{E}_x(F(X_s,s\leq t)x^{-1}X_t,t<T_0)\\ &= \mathbb{E}_x^{\uparrow}(F(X_s,s\leq t)),\end{aligned}$$

which proves the second part of the statement. It is still true that $Z_t^{\uparrow}$ converges in probability to $+\infty$ as $t\to\infty$. Hence $Z^{\uparrow}$ is a.s. not bounded and an application of the Markov property entails that $\lim_{t\to\infty}C_t=\infty$ $\mathbf{P}^{\uparrow}$-a.s. We conclude recalling that $\lim_{t\to\infty}X_t=\infty$ $\mathbb{P}^{\uparrow}$-a.s. □

3.4 SDE's in the stable case

In this section, we consider the case when X is a spectrally positive α-stable process $1<\alpha\leq 2$, that is a Lévy process with Laplace exponent ψ proportional to $\lambda\mapsto\lambda^{\alpha}$. In particular, $\psi'(0+)=0$ (critical case).

We show that the associated Q-process is the solution of a certain stochastic differential equation (SDE), which enlightens the immigration mechanism.

Theorem 3.3 *The branching process with branching mechanism ψ is the unique solution in law of the following SDE*

$$dZ_t=Z_{t-}^{1/\alpha}dX_t, \qquad (3)$$

where X is a spectrally positive α-stable Lévy process with Laplace exponent ψ. Moreover the branching process conditioned to be never extinct is solution of

$$dZ_t = Z_{t-}^{1/\alpha} dX_t + d\sigma_t, \tag{4}$$

where σ is an $(\alpha-1)$-stable subordinator with Laplace exponent ψ', independent of X.

The comparison between (3) and (4) allows to see the jumps of the subordinator σ as some instantaneous immigration added to the initial CB(ψ) in order to obtain the Q-process, which is a CBI(ψ, ψ').

Proof. The uniqueness in law of (3) follows from [11, Theorem 1]. Whether or not uniqueness holds for (4) remains an open question.

We turn to the law $\mathbf{P}$. By Lamperti's time-change,

$$Z_t = X_{C_t}, \qquad t \geq 0,$$

where X is a spectrally positive Lévy process with Laplace exponent ψ, and C is the non-decreasing time-change $C_t = \int_0^t Z_s ds$. Now by Theorem 4.1 in [5], there is a copy X' of X such that

$$X_{C_t} = Z_t = X_0 + \int_0^t Z_{s-}^{1/\alpha} dX'_s, \qquad t \leq T,$$

which entails (3).

We now show the result concerning $\mathbf{P}^\uparrow$. First recall from Proposition 3.2 that Lamperti's time-change still holds between Q-processes and processes conditioned to stay positive. We will thus find a SDE satisfied by X under $\mathbb{P}^\uparrow$ and then conclude by time-change for $\mathbf{P}^\uparrow$.

By marking the jumps of X under $\mathbb{P}^\uparrow$, we split the point process of jumps into two independent point processes. We will then identify their laws and deduce the SDE satisfied by X.

Let (A_t, U_t) be a Poisson point process in $(0,\infty)\times(0,1)$ with characteristic measure $\Lambda \otimes \lambda$, where λ stands for Lebesgue measure on $(0,1)$. The process $(A_t, t \geq 0)$ is the point process of jumps of some process X with law $\mathbb{P}$ defined by

$$X_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sum_{s \leq t} A_s \mathbf{1}_{\{A_s > \varepsilon\}} - t \int_{[\varepsilon,\infty)} r\Lambda(dr) \right).$$

Define two nonnegative r.v.'s Δ_t and δ_t by

$$(\Delta_t, \delta_t) = \begin{cases} (0, X_{t-}^{1/(\alpha-1)} A_t) & \text{if } X_{t-} > 0 \text{ and } U_t < \frac{A_t}{X_t} \\ (A_t, 0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular, Δ and δ never jump simultaneously and $\Delta X_t = A_t = \Delta_t + X_{t-}^{-1/(\alpha-1)} \delta_t$, $t \geq 0$. For any nonnegative predictable F, nonnegative bivariate f vanishing on the diagonal, and $x \geq 0$, we compute by optional projection the following expectation, after change of probability measure

$$\mathbb{E}_x^{\uparrow}(\sum_{s\leq t} F_s f(\Delta_s, \delta_s)) = \mathbb{E}_x^{\uparrow}\left[\sum_{s\leq t} F_s (f(0, A_s X_{s-}^{1/(\alpha-1)})\mathbf{1}_{U_s<A_s/X_s} + f(A_s,0)\mathbf{1}_{U_s\geq A_s/X_s})\right]$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_x \int_0^t ds F_s \mathbf{1}_{\{t<T_0\}} \int_0^\infty \Lambda(dz)\frac{X_s+z}{x}\left[\frac{z}{X_s+z}f(0, zX_s^{1/(\alpha-1)}) + \frac{X_s}{X_s+z}f(z,0)\right] \\ &= \mathbb{E}_x^{\uparrow} \int_0^t ds F_s \int_0^\infty \Lambda(dz)\left[\frac{z}{X_s}f(0, zX_s^{1/(\alpha-1)}) + f(z,0)\right]. \end{aligned}$$

But the Lévy measure $\Lambda(dz)$ is proportional to $z^{-(\alpha+1)}dz$, hence putting $r = zX_s^{1/(\alpha-1)}$, $\int_0^\infty \Lambda(dz)zX_s^{-1}f(0, zX_s^{1/(\alpha-1)}) = \int_0^\infty \Lambda(dr)rf(0,r)$, and the last displayed quantity equals

$$\mathbb{E}_x^{\uparrow} \int_0^t ds F_s \int_0^\infty \Lambda(dz)\left[zf(0,z) + f(z,0)\right].$$

Therefore under $\mathbb{P}^{\uparrow}$, $\Delta X_t = \Delta_t + X_{t-}^{-1/(\alpha-1)}\delta_t$, where Δ and δ are two independent Poisson point processes with characteristic measures $\Lambda(dz)$ and $z\Lambda(dz)$, respectively. Moreover, for any positive ε and t,

$$\sum_{s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s > \varepsilon\}} - t\int_{[\varepsilon,\infty)} r\Lambda(dr)$$

$$= \left(\sum_{s\leq t} \Delta_s \mathbf{1}_{\{\Delta_s>\varepsilon\}} - t\int_{[\varepsilon,\infty)} r\Lambda(dr)\right) + \sum_{s\leq t} \frac{\delta_s}{X_{s-}^{1/(\alpha-1)}}\mathbf{1}_{\{\delta_s>\varepsilon\}}.$$

It is known that the first term in the r.h.s. converges a.s. as $\varepsilon \downarrow 0$ to the value at time t, X_t' of an α-stable Lévy process. By absolute continuity between $\mathbb{P}^{\uparrow}$ and $\mathbb{P}$, the same holds for the quantity in the l.h.s. And the last quantity converges to

$$\sum_{s\leq t} \frac{\delta_s}{X_{s-}^{1/(\alpha-1)}} = \int_0^t \frac{d\sigma_s}{X_{s-}^{1/(\alpha-1)}},$$

where σ is an $(\alpha-1)$-stable subordinator independent from X defined by $\sigma_t = \sum_{s\leq t}\delta_s$. Indeed, the point process of jumps $(\delta_t, t\geq 0)$ of σ has compensation measure $\mu(dz) = z\Lambda(dz)$, and since then σ has Laplace exponent ψ'. We conclude that under $\mathbb{P}^{\uparrow}$, the canonical process X satisfies

$$dX_t = dX_t' + \frac{1}{(X_{t-})^{1/(\alpha-1)}}d\sigma_t, \qquad t\geq 0,$$

where X' has law $\mathbb{P}$.

Go back to Lamperti's time-change to find the SDE satisfied by Z under $\mathbf{P}^{\uparrow}$. Write $Z_t = Z_0 + X_{C_t}$, with the same notations as previously, Z a (α-stable) Q-process and X a (α-stable) Lévy process conditioned to stay positive. Once again thanks to [5],

$$\int_0^t \frac{d\sigma_s}{(X_{s-})^{1/(\alpha-1)}} = \sigma'(\int_0^t \frac{ds}{X_s}), \qquad t \geq 0,$$

where σ' is a copy of σ, and

$$X'_{C_t} = \int_0^t Z_{s-}^{1/\alpha} dX''_s, \qquad t \geq 0,$$

where X'' is a copy of X'. Therefore

$$\begin{aligned} dZ_t &= dX_{C_t} = dX'_{C_t} + d\sigma'_t \\ &= Z_{t-}^{1/\alpha} dX''_t + d\sigma'_t, \end{aligned}$$

and (4) is proved. It thus remains to show the independence between X'' and σ'. Observing that

$$\sigma'_t = Z_t - Z_0 - X'_{C_t}, \qquad t \geq 0,$$

and

$$X''_t = \int_0^t Z_{s-}^{-1/\alpha} dX'_{C_s}, \qquad t \geq 0,$$

we see that the jump processes of X'' and σ' are $(\mathcal{G}_t)$-Poisson processes, with $\mathcal{G}_t = \sigma(Z_s, X'_{C_s}; s \leq t)$. Moreover, X'' and σ' never jump simultaneously as by construction the same holds for X' and σ, and

$$[\Delta\sigma'_t > 0 \text{ and } \Delta X''_t > 0] \Leftrightarrow [\Delta\sigma_{C_t} > 0 \text{ and } \Delta X'_{C_t} > 0].$$

Hence the jump processes of σ' and X'' are independent. Now since neither σ' nor X'' has a Gaussian coefficient, they are independent. $\square$

Bibliographie

[1] Athreya K.B., Ney P.E. (1972)
Branching processes. Springer-Verlag, New York.

[2] Bingham N.H. (1976)
Continuous branching processes and spectral positivity. Stoch. Proc. Appl. **4** 217-242.

[3] Chaumont L. (1996)
Conditionings and path decompositions for Lévy processes. Stoch. Proc. Appl. **64** 39-54.

[4] Grey D.R. (1974)
Asymptotic behaviour of continuous-time, continuous state-space branching processes. J. Appl. Prob. **11** 669-677.

[5] Kallenberg O. (1992)
Some time-change representations of stable integrals, via predictable transformations of local martingales. Stoch. Proc. Appl. **40** 199-223.

[6] Lambert A. (1999)
The genealogy of continuous-state branching processes with immigration. Prépublication 555 du Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, U. P. et M. Curie, Paris.

[7] Lamperti J. (1967)
Continuous-state branching processes. Bull. Amer. Math. Soc. **73** 382-386.

[8] Le Gall J.F., Le Jan Y. (1998)
Branching processes in Lévy processes : the exploration process. Ann. Probab. **26** 213-252.

[9] Lyons R., Pemantle R., Peres Y. (1995)
Conceptual proofs of $L \log L$ criteria for mean behavior of branching processes. Ann. Probab. **23** 1125-1138.

[10] Pinsky M.A. (1972)
Limit theorems for continuous state branching processes with immigration. Bull. Amer. Math. Soc. **78** 242-244.

[11] Zanzotto P.A. (1999)
On stochastic differential equations driven by Cauchy process and the other α-stable

motions. Mini-proceedings : conference on Lévy processes 179-183. U. of Aarhus, Denmark.

Chapitre 4

La loi jointe des âges et des restes de vie pour deux constructions d'ensembles régénératifs emboîtés

Abstract. We are interested in the component intervals of the complementaries of a monotone sequence $\mathcal{R}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_1$ of regenerative sets, for two natural embeddings. One is based on Bochner's subordination, and one on the intersection of independent regenerative sets. For each scheme, we study the joint law of the so-called ages and residual lifetimes.

AMS subject classification (2000) : Primary 60K05. Secondary 60G51.
Key words : Multivariate renewal theory - Regenerative set - Subordinator - Random covering intervals.

4.1 Introduction

The classical renewal theory is concerned with the so-called age and residual lifetime

$$A(t) = \inf\{s > 0 : t - s \in \mathcal{R}\}, \qquad R(t) = \inf\{s > 0 : s + t \in \mathcal{R}\},$$

where $\mathcal{R}$ is a regenerative set, that is the closed range of some subordinator. In particular, these are two useful notions to investigate the partition induced by $\mathcal{R}$, that is the family of connected components of the complement of $\mathcal{R}$. Clearly, if $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, the partition induced by $\mathcal{R}_1$ is finer than that induced by $\mathcal{R}_2$, in the sense that it is obtained by breaking each interval of the partition induced by $\mathcal{R}_2$ into smaller intervals. Hence, a nested family of regenerative sets can be used to construct fragmentation or coalescent processes. This idea has been used in particular in [5], where a connection with the Bolthausen-Sznitman coalescent [7] is established (see also [4, 9, 17, 19, 20, 21, 22] for related works).

The purpose of this paper is to determine the joint distribution of the sequence of ages and residual lifetimes associated to certain nested sequences of regenerative sets. Specifically, following [5], we shall consider two natural schemes to produce such families. One is based on Bochner's subordination, and the other on the intersection of independent regenerative sets. We shall focus on two natural sub-classes of regenerative sets, stable and stationary regenerative sets, whose distributions are invariant under scaling and translation, respectively. The main reason for studying these special cases is that these are precisely the two types of distributions that arise in classical limit theorems for regenerative sets (typically the Dynkin-Lamperti theorem [6] and the renewal theorem [10]).

An interesting feature in our results is they show that in general, the joint law of the ages and residual lifetimes depends on the nesting scheme. This contrasts with [2], where it is established that the joint law of the ages alone, only depends on the individual distributions of the regenerative sets.

The probability measure $\mathbb{P}^{\cap}$ will refer to the nesting scheme based on the intersection of independent regenerative sets. The probability measure $\mathbb{P}^{\star}$ will refer to the nesting scheme based on Bochner's subordination. In the stationary case, we show that the n-tuple $(A_1, R_1, \ldots, A_n, R_n) \doteq (A_1(0), R_1(0), \ldots, A_n(0), R_n(0))$ is an inhomogeneous Markov chain whose law is specified. In particular under $\mathbb{P}^{\star}$, this Markov chain has independent increments.

In the stable case, we give the semigroup of the bivariate Markov processes $(A_\alpha, R_\alpha; 0 < \alpha < 1) \doteq (A_\alpha(1), R_\alpha(1); 0 < \alpha < 1)$, both under $\mathbb{P}^{\cap}$ and $\mathbb{P}^{\star}$, and we specify its Lévy kernel under $\mathbb{P}^{\cap}$.

In the next section, we introduce some notation. The following two sections treat successively the stable case and the stationary case. The last section is devoted to some technical proof.

4.2 Preliminaries

4.2.1 Basics about subordinators

Denote by $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}\,(t), t \geq 0)$ a subordinator started at 0, and by $\vec{\mathcal{R}}$ its closed range

$$\vec{\mathcal{R}} = \{x \geq 0 : \vec{\sigma}_t = x \text{ for some } t \geq 0\}^{\text{cl}}.$$

To focus on the most interesting setting, we rule out the case of compound Poisson processes, so that in particular the regenerative set $\vec{\mathcal{R}}$ is non-lattice. The Laplace exponent ϕ of $\vec{\sigma}$ is characterized by

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda \vec{\sigma}_t)) = \exp(-t\phi(\lambda)), \qquad \lambda, t \geq 0.$$

It is specified by the Lévy-Khinchin formula

$$\phi(q) = \delta q + \int_0^\infty (1 - \mathrm{e}^{-qx}) \Pi(dx) = q \left(\delta + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qx} \bar{\Pi}(x) dx \right), \qquad q \geq 0, \tag{1}$$

where $\bar{\Pi}(x) = \Pi(x, \infty)$, $x > 0$, is the tail of the Lévy measure. A subordinator is said stable when its Laplace exponent is a power function ($\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$, for some $\alpha \in (0,1)$). The following equivalences are well-known

$$\int_0^\infty \bar{\Pi}(x)dx = \int_0^\infty x\Pi(dx) < \infty \Leftrightarrow \lim_{q\to 0+} q^{-1}\phi(q) < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}(\vec{\sigma}_1) < \infty.$$

By slight abuse, we then say that $\vec{\mathcal{R}}$ is positive-recurrent and define

$$\mu \doteq \delta + \int_0^\infty x\Pi(dx) = \lim_{q\to 0+} \frac{\phi(q)}{q} = \mathbb{E}(\vec{\sigma}_1).$$

We then denote by $M(\phi)$ the law of the pair $(UZ, (1-U)Z)$, where U is uniform on $(0,1)$ and Z is a nonnegative r.v. independent of U such that

1. $\mathbb{P}(Z = 0) = \delta/\mu$,
2. $\mathbb{P}(Z \in dz) = \mu^{-1} z\Pi(dz)$, $z > 0$.

We stress that $M(\phi)$ has Laplace transform

$$\int_0^\infty \int_0^\infty M(\phi)(dx\, dy) \exp(-\alpha x - \beta y) = \mu^{-1} \frac{\phi(\alpha) - \phi(\beta)}{\alpha - \beta}, \qquad \alpha, \beta > 0, \alpha \neq \beta. \qquad (2)$$

In order to define stationary (i.e. translation invariant) regenerative sets, follow [14] and [23], and introduce the two-sided subordinator $\overleftrightarrow{\sigma} = (\overleftrightarrow{\sigma}(t), t \in \mathbb{R})$

– The pair $(-\overleftrightarrow{\sigma}(0^-), \overleftrightarrow{\sigma}(0))$ follows $M(\phi)$,
– The processes $\sigma^+ = (\overleftrightarrow{\sigma}(t) - \overleftrightarrow{\sigma}(0), t \geq 0)$ and $\sigma^- = (-\overleftrightarrow{\sigma}(-t^-) + \overleftrightarrow{\sigma}(0^-), t \geq 0)$ are independent and both distributed as $(\vec{\sigma}(t), t \geq 0)$.

We then denote by $\overleftrightarrow{\mathcal{R}}$ the closed range of $\overleftrightarrow{\sigma}$. We point out that stationary regenerative sets with σ-finite distributions can be defined when $\mu = \infty$ (null-recurrent case), as in [11].

For any closed subset $\mathcal{R}$ of $\mathbb{R}$, and any real number t, define the age $A(t)$ and the residual lifetime $R(t)$ by

$$A(t) = \inf\{s > 0 : t - s \in \mathcal{R}\}, \qquad R(t) = \inf\{s > 0 : s + t \in \mathcal{R}\}.$$

For commodity, we will sometimes use the following notation

$$G(t) = \sup\{s < t : s \in \mathcal{R}\} = t - A(t), \qquad D(t) = \inf\{s > 0 : s \in \mathcal{R}\} = t + R(t).$$

Let also s_t stand for the scaling operator, and θ_t for the shift operator

$$\mathrm{s}_t(\mathcal{R}) = \{s : ts \in \mathcal{R}\}, \qquad \theta_t(\mathcal{R}) = \{s : s + t \in \mathcal{R}\}.$$

The Dynkin-Lamperti theorem then states that for any regenerative set $\vec{\mathcal{R}}$ whose Laplace exponent is regularly varying at 0+ with index α, $t^{-1}(A(t), R(t)) = (A(1), R(1)) \circ \mathrm{s}_t$

converges in distribution as $t \to \infty$ to the pair $(A(1), R(1))$ associated to a stable regenerative set of index α.
The renewal theorem states that for any positive-recurrent regenerative set $\overrightarrow{\mathcal{R}}$, $(A(t), R(t)) = (A(0), R(0)) \circ \theta_t$ converges in distribution as $t \to \infty$ to the pair $(A(0), R(0))$ of the associated stationary regenerative set, that is, the pair of variables with law $M(\phi)$.
We will now focus on these two possible limiting distributions, the scaling-invariant one, and the translation-invariant one.

(i) In the stable case, we will consider the age $A \doteq A(1)$ and the residual lifetime $R \doteq R(1)$ for stable regenerative sets, that we shall simply denote by $\mathcal{R}$ (instead of $\overrightarrow{\mathcal{R}}$).

(ii) In the positive-recurrent case, we will consider the age $A \doteq A(0)$ and the residual lifetime $R \doteq R(0)$ for stationary regenerative sets, that we shall simply denote by $\mathcal{R}$ (instead of $\overleftrightarrow{\mathcal{R}}$).

4.2.2 Two constructions of nested regenerative sets

Let $n \geq 1$. We here define the two schemes of n nested regenerative sets mentioned in the Introduction. We consider probability measures $\mathbb{P}^\star$ and $\mathbb{P}^\cap$ on the Cartesian product E^n, where E denotes the space of closed subsets of the line, endowed with Matheron's topology [18]. We stress that for simplicity the integer n may sometimes equal 2 in the sequel without further change of notation.

We first define the measure $\mathbb{P}^\star$ related to Bochner's subordination. Consider n independent subordinators $\tau_1, \ldots, \tau_n$, all stable subordinators indexed by $\mathbb{R}_+$ in the stable case, and subordinators indexed by $\mathbb{R}$ in the stationary case. Define $\mathcal{R}_k$ as the closed range of $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$, $k = 1, \ldots, n$. The probability measure $\mathbb{P}^\star$ then denotes the law of $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$. For a deep study on this topic, see e.g. [8].

In the intersection scheme, let $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ be independent regenerative sets, all stable subsets of $\mathbb{R}_+$ in the stable case, and stationary subsets of $\mathbb{R}$ in the stationary case. Define $\mathcal{R}_k = \mathcal{S}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{S}_k$, $k = 1, ..., n$. The probability measure $\mathbb{P}^\cap$ then denotes the law of $(\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$.

We have to assume that the coordinates $\mathcal{R}_k$, $k = 1, \ldots, n$, are not trivial (that is, reduced to $\{0\}$ in the stable case, empty or discrete in the stationary case). Note that this always holds under $\mathbb{P}^\star$.
As to $\mathbb{P}^\cap$, the potential measures of the $\mathcal{S}_k$ have to satisfy in the positive-recurrent case some technical assumptions (see [3]). In the stable case, we recall that for independent stable regenerative sets $\mathcal{S}_\alpha$ and $\mathcal{S}_\beta$ of indexes α and β respectively, $\mathcal{S}_\alpha \cap \mathcal{S}_\beta$ is a stable regenerative set of index $\alpha + \beta - 1$ if $\alpha + \beta > 1$, and is reduced to $\{0\}$ otherwise.

To make things clear, we state the following elementary

Lemma 4.1 *The following assertions hold under $\mathbb{P}^\cap$ and under $\mathbb{P}^\star$.*
In the stable (resp. stationary) case, each coordinate $\mathcal{R}_k$ is a stable (resp. stationary) regenerative set, $k = 1, \ldots, n$.

Proof. It is known that the scaling invariance and the regenerative property are preserved by intersection and Bochner's subordination. Hence, let us focus on the stationary case. For the intersection scheme, it is clear that the (nonempty by assumption) intersections of stationary sets are still stationary. For the subordination scheme, consider τ_1 and τ_2 two independent two-sided subordinators. The independence between $(\tau_1 \circ \tau_2(-t-) - \tau_1 \circ \tau_2(0-), t \geq 0)$ and $(\tau_1 \circ \tau_2(t) - \tau_1 \circ \tau_2(0), t \geq 0)$ follows from the independence of increments of τ_1 as well as the independence between τ_1^- and τ_1^+. It is easy to see that they are both distributed as $\vec{\tau}_1 \circ \vec{\tau}_2$. A straightforward calculation next shows that the law of $(\tau_1 \circ \tau_2(0-), \tau_1 \circ \tau_2(0))$ is $M(\phi_2 \circ \phi_1)$. □

Proposition 4.2 *Under $I\!P^\cap$ as under $I\!P^\star$, and for both the stable and stationary cases, $((A_k, R_k), 1 \leq k \leq n)$ is a (inhomogeneous) Markov chain with values in $[0, \infty)^2$.*

Proof. For the sake of conciseness, we focus on the intersection scheme. We stress that the proof for the subordination scheme relies on similar arguments. Let $2 \leq k \leq n-1$.

We first deal with the stationary case. Denote by $\mathcal{F}_t^{(k)}$ the σ-algebra generated by $((-\infty, t] \cap \mathcal{S}_i, 1 \leq i \leq k)$. Let $\vec{\theta}_t$ be the positive shift operator, that is for any real set $\mathcal{R}$

$$\vec{\theta}_t(\mathcal{R}) = \{s \geq 0 : s + t \in \mathcal{R}\},$$

and let $\overleftarrow{\theta}_t$ be the negative shift operator

$$\overleftarrow{\theta}_t(\mathcal{R}) = \{s \geq 0 : -s + t \in \mathcal{R}\}.$$

It is clear that the k-tuple $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$ is regenerative w.r.t. the filtration $\mathcal{F}^{(k)}$. Recall that D_k is the first passage time at $(0, \ldots, 0)$. Since D_k is a $\mathcal{F}^{(k)}$-stopping time, the shifted k-tuple $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \vec{\theta}_{D_k}$ is independent of $\mathcal{F}^{(k)}$ and has the same law as $(\vec{\mathcal{S}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{S}}_k)$. In particular, $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap (-\infty, G_k]^k$ and $(G_1, D_1, \ldots, G_k, D_k)$ are jointly independent of $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \vec{\theta}_{D_k}$. The construction of the stationary regenerative sets allows us to make the same reasoning in the negative sense. As a consequence, $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \overleftarrow{\theta}_{G_k}$ and $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \vec{\theta}_{D_k}$ are jointly independent of $(G_1, D_1, \ldots, G_k, D_k)$. Conclude by noting that the pair (G_{k+1}, D_{k+1}) is a functional of (G_k, D_k), $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \overleftarrow{\theta}_{G_k}$, $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \vec{\theta}_{D_k}$, and of an independent regenerative set $\mathcal{S}_{k+1}$.

We next turn to the stable case. The regenerative property still applies at D_k, and we get that $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [0, G_k]^k$ and $(G_1, D_1, \ldots, G_k, D_k)$ are jointly independent of $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \circ \vec{\theta}_{D_k}$. From [24], we know that the distribution of every $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, k$ is invariant under the action of $\varphi : x \mapsto x^{-1}$. As they are all independent, this is again the case of the k-tuple $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k)$. Next notice that $D_k \circ \varphi = 1/G_k$. Applying the regenerative property to $(\varphi(\mathcal{S}_1), \ldots, \varphi(\mathcal{S}_k))$, we get that conditional on G_k, $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [0, G_k]^k$ is independent of $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [G_k, +\infty)^k$. As a consequence, conditional on (G_k, D_k), $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [0, G_k]^k$ and $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [D_k, +\infty)^k$ are jointly independent of $(G_1, D_1, \ldots, G_k, D_k)$. Conclude as previously by noting that (G_{k+1}, D_{k+1}) is a functional of $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [0, G_k]^k$, $(\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k) \cap [D_k, +\infty)^k$, and of an independent regenerative set $\mathcal{S}_{k+1}$. □

4.3 The stable case

In this section, we study stable regenerative sets $\mathcal{R}_\alpha$ of index $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. In this situation, it will be easier to consider the quantities $G_\alpha = 1 - A_\alpha$ and $D_\alpha = 1 + R_\alpha$, rather than A_α and R_α.
The distribution of (G_α, D_α) (resp. G_α, resp. D_α) has density r_α (resp. p_α, resp. q_α) where (see [6])

$$\begin{aligned}
r_\alpha(x,y) &= \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}(y-x)^{\alpha-2}, && 0<x<1<y,\\
p_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}, && 0<x<1,\\
q_\alpha(y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} y^{-1}(y-1)^{\alpha-1}, && y>1.
\end{aligned}$$

In the first subsection, we will consider $\alpha, \beta \in (0,1)$ such that $\gamma \doteq \alpha + \beta < 1$. It is known that if $\mathcal{R}_\alpha$ and $\mathcal{R}_\beta$ are two independent stable regenerative sets of indices $1-\alpha$ and $1-\beta$, respectively, then $\mathcal{R}_\gamma \doteq \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_\beta$ is a stable regenerative set of index $1-\gamma$ embedded in $\mathcal{R}_\alpha$.

In the second subsection, we will consider two independent stable subordinators τ_α and τ_β with indices $1-\alpha$ and $1-\beta$, respectively. Writing $1-\gamma \doteq (1-\alpha)(1-\beta)$, it is known that the closed range $\mathcal{R}_\gamma$ of $\tau_\alpha \circ \tau_\beta$ is a stable regenerative set of index $1-\gamma$ which is embedded in the closed range $\mathcal{R}_\alpha$ of τ_α.

As said in the Preliminaries, the law of $(\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\gamma)$ will be denoted by $\mathbb{P}^\cap$ in the first construction, and by $\mathbb{P}^\star$ in the second one.

4.3.1 The intersection scheme

In the next theorem, we give the joint law of $(G_\alpha, D_\alpha, G_\gamma, D_\gamma)$ under $\mathbb{P}^\cap$. At the end of the present subsection, we will more generally consider the process $(G_\alpha, D_\alpha; 0<\alpha<1)$ under $\mathbb{P}^\cap$, and we will determine the Lévy kernel of the Markov process $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$ (its semigroup is given by the next theorem).

Theorem 4.3 *Conditional on $(G_\alpha = g,\ D_\alpha = d)$, $(1/G_\gamma, D_\gamma)$ is distributed under $\mathbb{P}^\cap$ as*

$$\left(\frac{1}{g} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{g}\right)\frac{1}{\Gamma},\ d + (M-d)\Delta\right),$$

where Γ and Δ are two independent r.v.'s, independent of (m, M), with densities p_γ and q_γ, respectively, and

$$\mathbb{P}(m > u, M < v \mid G_\alpha = g, D_\alpha = d) = \left(\frac{(g-u)(v-d)}{g(v-u)}\right)^\beta \qquad u \in (0,g), v \in (d,\infty).$$

In order to compute the conditional density of (G_γ, D_γ), we recall that for $0 < \mu < \nu$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \mapsto F(\lambda, \mu, \nu, z)$ is the hypergeometric function defined by

$$F(\lambda, \mu, \nu, z) = \frac{1}{B(\mu, \nu - \mu)} \int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-\mu-1}(1-tz)^{-\lambda} dt, \qquad z \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

where B stands for the beta function.
The proof of the following corollary is to be found in the last section.

Corollary 4.4 *For any* $0 < x < g < 1 < d < y$, $0 < \gamma < \alpha < 1$, *with* $\beta = \gamma - \alpha$,

$$\mathbb{P}^\cap(G_\gamma \in dx, D_\gamma \in dy \mid G_\alpha = g, D_\alpha = d)/dx\, dy$$

$$= B(\beta, 1-\gamma)^{-2}(d-g)^{1-\gamma} g^\alpha x^{-\gamma} \frac{((g-x)(y-d))^{\beta-1}}{(y-x)^{1-\alpha}} H\left(\frac{(g-x)(y-d)}{(d-g)(y-x)}\right),$$

where H *is the function defined by*

$$H(x) = 1 + \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\beta} \int_0^x dz\, F(2-\alpha, \gamma, 1+\beta, -z).$$

The proof of Theorem 4.3 uses a representation of stable regenerative sets by random intervals extracted from [12]. These intervals are generated by Poisson measures on $(0,\infty)^2$, which were also used in [5] to construct the intersection embedding.

Consider a Poisson point process $(t, l_t; t \geq 0)$ taking values in $(0,\infty)^2$ with intensity $dx\, \mu(dy)$. To each point (t, l_t) of $(0,\infty)^2$, we associate the open interval $I_t = (t, t + l_t)$. For any Borel set B in $(0,\infty)^2$, we define $\mathcal{C}(B)$ as the open subset covered by the random intervals associated to the points 'fallen' in B

$$\mathcal{C}(B) = \bigcup_{(t,l_t)\in B} I_t,$$

and consider the random set left uncovered by all these intervals

$$\mathcal{R} = [0,\infty) \setminus \bigcup_{t\geq 0} I_t = [0,\infty) \setminus \mathcal{C}((0,\infty)^2).$$

If $\bar{\mu}$ denotes the tail of μ (that is $\bar{\mu}(x) = \mu(x,\infty)$, $x > 0$), then a theorem extracted from [12] states that

$$\int_0^1 \exp(\int_t^1 \bar{\mu}(s)ds)dt < \infty$$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{R}$ is a perfect regenerative set with potential density $u(t) = \exp(\int_t^1 \bar{\mu}(s)ds)$, $\qquad t > 0$.

For instance, take $\bar{\mu}_\alpha(x) = \alpha x^{-1}$, for some $\alpha \in (0,1)$, and $\mathcal{R}$ is then a stable regenerative set with index $1 - \alpha$. These tools are fairly adapted to our situation, since for two independent Poisson measures with respective intensities $dx\,\mu_\alpha(dy)$ and $dx\,\mu_\beta(dy)$, $\mathcal{R}_\alpha$ and $\mathcal{R}_\beta$ are two independent regenerative sets such that

$$\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_\beta = [0,\infty) \setminus (\mathcal{C}_\alpha((0,\infty)^2) \cup \mathcal{C}_\beta((0,\infty)^2)).$$

In words, $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_\beta$ is the set of points left uncovered by the intervals associated to the point process with characteristic tail $\bar{\mu}^\cap(x) = \bar{\mu}_\alpha(x) + \bar{\mu}_\beta(x) = (\alpha+\beta)x^{-1}$, $x > 0$, and one recovers the fact that $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_\beta$ is stable with index $1-\gamma$, where $\gamma = \alpha + \beta$.

The following two lemmas will be useful for the proof of the theorem.

Lemma 4.5 *For $0 < a < b$, set*

$$V(a,b) = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x + y > b, x > a\}.$$

Then for any $\gamma \in (0,1)$, the following equality in distribution holds

$$\inf([b,\infty) \setminus \mathcal{C}_\gamma(V(a,b))) \overset{(d)}{=} a + (b-a)\Delta,$$

where Δ has density q_γ.

Proof of Lemma 4.5. By translation invariance of Lebesgue measure, it suffices to show the result for $a = 0$. Since all the intervals associated to the complementary of $V(0,b)$ are a.s. included in $(0,b)$, the first point left uncovered by $V(0,b)$ is the first point greater than b in the complementary of $\mathcal{C}_\gamma((0,\infty)^2)$, and consequently it has the same law as $D_\gamma(b)$. Conclude recalling that $D_\gamma(b) \overset{(d)}{=} b\,D_\gamma$, and that D_γ has density q_γ.□

Lemma 4.6 *For $0 < a < b$, set*

$$U(a,b) = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x + y < b, x < a\}.$$

Then for any $\gamma \in (0,1)$, the following equality in distribution holds

$$\sup((0,a] \setminus \mathcal{C}_\gamma(U(a,b))) \overset{(d)}{=} \left(\frac{1}{b} + (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})\frac{1}{\Gamma}\right)^{-1},$$

where Γ has density p_γ.

Proof of Lemma 4.6. The main step is proving that the image of $\mathcal{C}_\gamma(U(a,b))$ by the mapping $x \mapsto x^{-1}$ has the same law as $\mathcal{C}_\gamma(V(b^{-1},a^{-1}))$. We will then use the previous lemma to conclude. For commodity, we write

$$\tilde{G} = \sup((0,a] \setminus \mathcal{C}_\gamma(U(a,b))).$$

Define the mapping $\psi : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2$ by

$$\psi(x,y) = (\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}), \qquad x, y > 0,$$

and notice that $\psi(U(a,b)) = V(b^{-1}, a^{-1})$. If $\varepsilon_{(x,y)}$ denotes the Dirac mass at (x,y), then the counting measure $\sum_{(t,l_t)\in U(a,b)} \varepsilon_{(t,l_t)}$ is a Poisson measure on $U(a,b)$ with intensity $\rho(dx\,dy) = (1-\gamma)y^{-2}dx\,dy$ $(x, y > 0)$. As the image of $\mathcal{C}_\gamma(U(a,b))$ by the mapping $x \mapsto x^{-1}$ is

$$\bigcup_{(t,l_t)\in U(a,b)} \left(\frac{1}{t+l_t}, \frac{1}{t}\right),$$

it is thus distributed as

$$\bigcup_{(t,l'_t)\in V(b^{-1},a^{-1})} (t, t+l'_t),$$

where $\sum_{(t,l'_t)\in V(b^{-1},a^{-1})} \varepsilon_{(t,l'_t)}$ is a Poisson measure on $V(b^{-1},a^{-1})$ with intensity $\rho\circ\psi^{-1}$. A straightforward calculation now shows that $\rho\circ\psi^{-1} = \rho$, and thanks to Lemma 4.5,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{G}} &\overset{(d)}{=} \inf([a^{-1},\infty)\setminus \mathcal{C}_\gamma(V(b^{-1},a^{-1})))\\ &\overset{(d)}{=} b^{-1} + (a^{-1} - b^{-1})\Delta,\end{aligned}$$

where Δ has density q_γ. We conclude with the observation that if Δ has density q_γ, then $\Gamma = \Delta^{-1}$ has density p_γ. □

We now provide the
Proof of Theorem 4.3. We work under the conditional probability upon $(G_\alpha = g, D_\alpha = d)$. Let Z be the following subset of $(0,\infty)^2$

$$Z = \{(x,y) : x \le d, x+y \ge g\}.$$

Then a.s. under the conditional probability, $\mathcal{C}_\alpha(Z) = (g,d)$. On the other hand, since the characteristic measure μ_β is integrable on every interval (ε,∞) $(\varepsilon > 0)$, but not integrable at 0+, there are r.v.'s $0 < m < g$, and $d < M < \infty$, such that

$$\mathcal{C}_\beta(Z)\cap(0,g] = (m,g],$$

$$\mathcal{C}_\beta(Z)\cap[d,\infty) = [d,M),$$

with

$$m = \min\{t : (t,l_t)\in Z\},$$

$$M = \max\{t+l_t : (t,l_t)\in Z\},$$

where (t,l_t) refer to the points of the Poisson process with characteristic measure μ_β. Following what is explained before the statement of the theorem, recall that for any Borel set B, $\mathcal{C}_\alpha(B)\cup\mathcal{C}_\beta(B) = \mathcal{C}_\gamma(B)$, and in particular $\mathcal{C}_\gamma(Z) = (m,M)$. Before computing the (conditional) law of (m,M), note then that conditional on $(G_\alpha, D_\alpha) = (g,d)$, and $(m,M) = (u,v)$,

$$\mathcal{C}_\gamma((U(u,g)\cup V(d,v))^c) = (u,v),$$

with the notations of the preceding lemmas, that is

$$U(u,g) = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x+y < g, x < u\},$$

$$V(d,v) = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x+y > v, x > d\}.$$

As a consequence, $\mathcal{C}_\gamma((0,\infty)^2) = \mathcal{C}_\gamma(U(u,g)) \cup \mathcal{C}_\gamma(V(d,v)) \cup (u,v)$, so that

$$G_\gamma = \sup((0,1] \setminus \mathcal{C}_\gamma((0,\infty)^2)) = \sup((0,u] \setminus \mathcal{C}_\gamma((0,\infty)^2)) = \sup((0,u] \setminus \mathcal{C}_\gamma(U(u,g))),$$

and similarly

$$D_\gamma = \inf([v,\infty) \setminus \mathcal{C}_\gamma(V(d,v))).$$

Recall that to disjoint Borel sets correspond independent counting measures. Since the event $\{(G_\alpha, D_\alpha) = (g,d), (m,M) = (u,v)\}$ is measurable w.r.t. the counting measure on Z, the independence property between the counting measures on $U(u,g)$ and $V(d,v)$ (which have empty intersection with Z and are disjoint) still holds under the conditional law. Hence conditional on $(G_\alpha, D_\alpha) = (g,d)$, and $(m,M) = (u,v)$, according to Lemma 4.6,

$$\frac{1}{G_\gamma} \overset{(d)}{=} \frac{1}{g} + (\frac{1}{u} - \frac{1}{g})\frac{1}{\Gamma},$$

where Γ has density p_γ. Similarly, the conditional law of D_γ according to Lemma 4.5 is

$$D_\gamma \overset{(d)}{=} d + (v-d)\Delta,$$

where Δ has density q_γ. But $U(u,g) \cap V(d,v) = \emptyset$, hence Γ and Δ are (conditionally) independent. Since none of the distributions of Γ and Δ involves u or v, an integration w.r.t. the law of (m,M) yields the independence between Γ and Δ, and between (Γ,Δ) and (m,M), and completes the proof.

It thus remains to compute the (conditional) law of (m,M). It is clear that if

$$Z' = \{(x,y) \in Z : x \geq u, x+y \leq v\}, \qquad u < g, v > d,$$

then

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(m > u, M < v) &= \mathbb{P}(\text{ the Poisson measure associated to } \mu_\beta \text{ has no atom in } Z \backslash Z') \\
&= \exp\left\{-\beta \int_{Z\backslash Z'} dx\, dy\, y^{-2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\beta \left[\int_0^u dx \int_{g-x}^\infty dy\, y^{-2} + \int_u^d dx \int_{v-x}^\infty dy\, y^{-2}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-\beta \left[\int_0^u \frac{dx}{g-x} + \int_u^d \frac{dx}{v-x}\right]\right\} \\
&= \exp\{-\beta[-\ln(g-u) + \ln(g) - \ln(v-d) + \ln(v-u)]\} \\
&= \left(\frac{(g-u)(v-d)}{g(v-u)}\right)^\beta,
\end{aligned}$$

which is the expected expression. □

As announced in the beginning of this subsection, we now deal with a monotone family $(\mathcal{R}_\alpha, 0 < \alpha < 1)$, where $\mathcal{R}_\alpha$ is a regenerative set of index $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ such that for $\alpha < \gamma$

$$\mathcal{R}_\gamma \overset{(d)}{=} \mathcal{R}_\alpha \cap \bar{\mathcal{R}}, \tag{4}$$

where $\bar{\mathcal{R}}$ is some independent stable regenerative set of index $\gamma - \alpha$. We know that the process $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$ is Markovian, and its semigroup is given by Theorem 4.3. We first expose the construction [5] of the family $(\mathcal{R}_\alpha, 0 < \alpha < 1)$, and then state a theorem giving the Lévy kernel of $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$.

Recall that if (x_i, y_i), $i \in I$, are the atoms of a Poisson measure on $(0,\infty)^2$ with characteristic measure $\mu_\alpha(dx\,dy) = \alpha y^{-2} dx\,dy$, then the closed set $[0,\infty) \setminus \cup_{i\in I}(x_i, x_i + y_i)$ is a stable regenerative set of index $1-\alpha$. As in Construction 5 in [5], generate a Poisson measure on $(0,\infty)^2 \times (0,1)$ with intensity $y^{-2} dx\,dy\,da$, and define $\mathcal{R}_\alpha$ as the set left uncovered by intervals $(x_i, x_i + y_i)$, $i \in I$ corresponding to the atoms (x_i, y_i, a_i) of the Poisson measure such that $a_i \le \alpha$. In particular, the following hold. The set $\mathcal{R}_\alpha$ is a stable regenerative set of index $1-\alpha$, the $\mathcal{R}_\alpha$'s are nested, meaning that $\mathcal{R}_\gamma \subseteq \mathcal{R}_\alpha$ for $0 < \alpha < \gamma < 1$, and if $\bar{\mathcal{R}}$ is the set left uncovered by intervals $(x_i, x_i + y_i)$, $i \in I$, corresponding to points such that $\alpha \le a_i < \gamma$, then $\bar{\mathcal{R}}$ satisfies equation (4).

We now focus on the process $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$. Recall from [5, Proposition 6], that there is the equality of finite-dimensional distributions

$$(1 - G_\alpha, 0 < \alpha < 1) \overset{(d)}{=} (\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_1}, 0 < \alpha < 1), \tag{5}$$

where $(\Gamma_\alpha, 0 < \alpha < 1)$ stands for a gamma subordinator.
On the other hand, we know from [24] that for fixed $\alpha \in (0,1)$, the distribution of $\mathcal{R}_\alpha$ is invariant under the action of $x \mapsto x^{-1}$, and consequently

$$G_\alpha \overset{(d)}{=} \frac{1}{D_\alpha}.$$

A slight modification of the proof of Lemma 4.6 shows in fact that for our construction $(\mathcal{R}_\alpha, 0 < \alpha < 1)$,

$$(G_\alpha, 0 < \alpha < 1) \overset{(d)}{=} (\frac{1}{D_\alpha}, 0 < \alpha < 1).$$

For commodity, we thus study the process $((G_\alpha)^{-1}, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$. We recall that the Lévy kernel N describes the distribution of the jumps of this (inhomogeneous) Markov process. More precisely, it is the mapping that associates to $(\alpha, g^{-1}, d) \in (0,1) \times (1,\infty)^2$ a σ-finite measure $N(\alpha, g^{-1}, d; \cdot)$ on $(0,\infty)^2$, such that for any nonnegative Borel function h on $(1,\infty)^4$ and nonnegative $(H_\alpha, 0 < \alpha < 1)$ predictable w.r.t. the natural filtration generated by $(G_\alpha, D_\alpha; 0<\alpha<1)$,

$$\mathbb{E}^{\cap} \sum_{0<\alpha<1} H_\alpha\, h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-}, \frac{1}{G_\alpha}, D_\alpha)$$

$$= \mathbb{E}^{\cap} \int_0^1 d\alpha\, H_\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty N(\alpha, \frac{1}{G_\alpha}, D_\alpha; dx\, dy) h(\frac{1}{G_\alpha}, D_\alpha, \frac{1}{G_\alpha}+x, D_\alpha+y), \qquad (6)$$

where the sum in the l.h.s. is taken over the (countable) jumps of $(G_\alpha^{-1}, D_\alpha; 0<\alpha<1)$. Recall that F is the hypergeometric function defined by (3), and for $\beta\in(0,1)$, let p_β and q_β denote by abuse of notation the respective laws of G_β and D_β.

Theorem 4.7 *The Lévy kernel of $((G_\alpha)^{-1}, D_\alpha; 0<\alpha<1)$ defined by (6) can be expressed for any $(\alpha, g^{-1}, d)\in(0,1)\times(1,\infty)^2$ and nonnegative measurable function f on $(0,\infty)^2$ by*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty N(\alpha, g^{-1}, d; dx\, dy) f(x,y)\\
&\quad = \int_0^1 p_\alpha(d\Gamma) \int_1^\infty q_\alpha(d\Delta) \quad \times \quad \left\{ \int_0^g dx \int_d^\infty dy (y-x)^{-2} f((\frac{1}{x}-\frac{1}{g})\frac{1}{\Gamma}, (y-d)\Delta) \right.\\
&\qquad\qquad + \int_0^g dx\, \frac{d-g}{(d-x)(g-x)} f((\frac{1}{x}-\frac{1}{g})\frac{1}{\Gamma}, 0)\\
&\qquad\qquad \left. + \int_d^\infty dy\, \frac{d-g}{(y-d)(y-g)} f(0,(y-d)\Delta) \right\}.
\end{aligned}$$

Dropping α, g, d for clarity, this yields

$$N(dx\, dy) = N_0(dx\, dy) + N_1(dx)\varepsilon_0(dy) + \varepsilon_0(dx) N_2(dy), \qquad x,y>0,$$

where ε_0 stands for the Dirac mass at 0 and

$$N_0(dx\, dy) = \frac{\alpha^2}{((g^{-1}+x)(d+y)-1)^{\alpha+1}} F(\alpha+1, 1-\alpha, 2, \frac{-xy}{(dg^{-1}-1)((g^{-1}+x)(d+y)-1)}) dx\, dy,$$

$$\begin{aligned}
N_1(dx) &= x^{-1}\left(1+\frac{x}{g^{-1}-d^{-1}}\right)^{-\alpha} dx,\\
N_2(dy) &= y^{-1}\left(1+\frac{y}{d-g}\right)^{-\alpha} dy.
\end{aligned}$$

In words, N_0 describes the simultaneous jumps of G_α and D_α, N_1 those of G_α alone, and N_2 those of D_α alone. Roughly speaking, the bivariate process $(G_\alpha, D_\alpha; 0<\alpha<1)$ jumps at time α iff there is a point of the tridimensional point process in $T_\alpha^{(0)}\cup T_\alpha^{(1)}\cup T_\alpha^{(2)}$, where

$$T_\alpha^{(0)} = \{(x,y,a) : x<G_{\alpha-}, x+y>D_{\alpha-}, a=\alpha\},$$

$$T_\alpha^{(1)} = \{(x,y,a) : x < G_{\alpha-}, G_{\alpha-} < x+y < D_{\alpha-}, a = \alpha\},$$
$$T_\alpha^{(2)} = \{(x,y,a) : G_{\alpha-} < x < D_{\alpha-}, x+y > D_{\alpha-}, a = \alpha\}.$$

Then α is a jump time of both coordinates, of the first coordinate only, or of the second one only, whether this point 'fell' into $T_\alpha^{(0)}$, $T_\alpha^{(1)}$, or $T_\alpha^{(2)}$.

Proof. Consider for $\alpha \in (0,1)$ the random subsets Z_α and Z'_α of $[0,\infty)^2 \times \{\alpha\}$

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \{(x,y,a) : x < D_{\alpha-}, x+y > G_{\alpha-}, a = \alpha\}, \\ Z'_\alpha &= \{(x,y,a) : x > G_{\alpha-}, x+y < D_{\alpha-}, a = \alpha\}. \end{aligned}$$

As in the proof of Theorem 4.3, note that β is a jump time of $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$ iff there is a point of the Poisson process in $Z_\beta \backslash Z'_\beta$. For such a point $(x_\beta, y_\beta, \beta)$, let

$$m_\beta = x_\beta, \qquad M_\beta = x_\beta + y_\beta,$$

and if $(G_\beta, D_\beta) = (G_{\beta-}, D_{\beta-})$, let $(m_\beta, M_\beta) = (G_{\beta-}, D_{\beta-})$. Referring to the proof of Theorem 4.3, by optional projection on the natural filtration generated by $(m_\alpha, M_\alpha; 0 < \alpha < 1)$ applied to the l.h.s. of (6), we get

$$\mathbb{E} \sum_{0<\alpha<1} H_\alpha h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-}, \frac{1}{G_\alpha}, D_\alpha) = \mathbb{E} \sum_{0<\alpha<1} H_\alpha \int_0^1 p_\alpha(d\Gamma) \int_1^\infty q_\alpha(d\Delta)$$
$$\times h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-}, \frac{1}{G_{\alpha-}} + \frac{1}{\Gamma}(\frac{1}{m_\alpha} - \frac{1}{G_{\alpha-}}), D_{\alpha-} + \Delta(M_\alpha - d_{\alpha-})).$$

Now the point process $(x_i, x_i + y_i, a_i; i \in I)$ indexed by its third component is a Poisson point process with characteristic measure $(v-u)^{-2} du\, dv$. By predictable projection on the natural filtration generated by $(G_\alpha, D_\alpha; 0 < \alpha < 1)$, the last displayed quantity equals

$$\mathbb{E} \int_0^1 d\alpha\, H_\alpha \int_0^1 p_\alpha(d\Gamma) \int_1^\infty q_\alpha(d\Delta)$$

$$\begin{aligned} \times \quad & \Big\{ \int_0^{G_{\alpha-}} du \int_{d_{\alpha-}}^\infty dv\, (v-u)^{-2} h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-}, \frac{1}{G_{\alpha-}} + (\frac{1}{u} - \frac{1}{G_{\alpha-}})\frac{1}{\Gamma}, D_{\alpha-} + (v - D_{\alpha-})\Delta) \\ + \quad & \int_0^{G_{\alpha-}} du \int_{G_{\alpha-}}^{D_{\alpha-}} dv\, (v-u)^{-2} h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-}, \frac{1}{G_{\alpha-}} + (\frac{1}{u} - \frac{1}{G_{\alpha-}})\frac{1}{\Gamma}, D_{\alpha-}) \\ + \quad & \int_{G_{\alpha-}}^{D_{\alpha-}} du \int_{D_{\alpha-}}^\infty dv\, (v-u)^{-2} h(\frac{1}{G_{\alpha-}}, d_{\alpha-}, \frac{1}{G_{\alpha-}}, D_{\alpha-} + (v - D_{\alpha-})\Delta) \Big\} \end{aligned}$$

and some elementary integration yields the r.h.s. in (6).
We skip the exact computation of N_0, N_1, N_2, which relies on the same arguments as in the proof of Corollary 4.4. □

4.3.2 The subordination scheme

Denote by $p_t^{(\alpha)}$ the density of $\tau_\alpha(t)$. In particular, the scaling property entails that

$$p_t^{(\alpha)}(x) = t^{-1/\alpha} p_1^{(\alpha)}(t^{-1/\alpha}x), \qquad t, x > 0.$$

Theorem 4.8 *The distribution of the quadruple $(G_\alpha, D_\alpha, G_\gamma, D_\gamma)$ under $I\!P^\star$ can be described as follows. For any $0 < g < 1 < d$, $0 < x < g, y > 0$,*

$$I\!P^\star(G_\alpha - G_\gamma \in dx,\ D_\gamma - D_\alpha \in dy \mid G_\alpha = g, D_\alpha = d)/dx\,dy$$

$$= \frac{(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} g^\alpha \int_0^1 ds \int_1^\infty dt\, s^{-\beta}(t-s)^{\beta-2} \int_0^\infty dl\, p_{ls}^{(\alpha)}(g-x) p_{l(1-s)}^{(\alpha)}(x) p_{l(t-1)}^{(\alpha)}(y).$$

In particular, the pair $(G_\alpha - G_\gamma, D_\gamma - D_\alpha)$ is independent of D_α.

Before proving the theorem, we will need the following lemma, where for any subordinator τ started at 0

$$L \doteq L(1) = \inf\{t \geq 0 : \tau(t) > 1\}$$

is the local time.

Lemma 4.9 *Conditional on $L = l, G = g, D = d$, the pre-l process $(\tau_t, t \leq l)$ and the post-l process $(\tau(t+l) - d, t \geq 0)$ are independent. Moreover, the post-l process is distributed as τ, and with the usual convention $\tau(0-) = 0$, the process $(g - \tau((t-l)-), t \leq l)$ has the law of the bridge of τ from 0 to g over $[0, l]$.*

Proof of Theorem 4.8. We first work conditionally on $L_\alpha = l, G_\alpha = g, D_\alpha = d$. In particular, $g = \tau_\alpha(l-)$, $d = \tau_\alpha(l)$. Next notice that

$$L_\gamma = \inf\{t \geq 0 : \tau_\alpha \circ \tau_\beta(t) > 1\} = \inf\{t \geq 0 : \tau_\beta(t) > l\} = L_\beta(l).$$

Since then

$$D_\gamma = \tau_\alpha(\tau_\beta(L_\gamma)) = \tau_\alpha(D_\beta(l)) \qquad \text{a.s.}$$

Similarly we get

$$G_\gamma = \tau_\alpha(G_\beta(l)) \qquad \text{a.s.}$$

Now by the scaling property, $(G_\beta(l),\ D_\beta(l)) \overset{(d)}{=} l(G_\beta,\ D_\beta)$. Then for any nonnegative measurable f and h,

$$\mathbb{E}^\star(f(G_\alpha - G_\gamma)\, h(D_\gamma - D_\alpha) \mid L_\alpha = l,\ G_\alpha = g,\ D_\alpha = d)$$

$$= \int_0^1 \int_1^\infty ds\, dt\, r_\beta(s,t) \mathbb{E}(f(g - \tau_\alpha(ls)) h(\tau_\alpha(lt) - d) \mid L_\alpha = l,\ G_\alpha = g,\ D_\alpha = d),$$

Thanks to the previous lemma and then from classical results on one-dimensional densities of bridges,

$$\mathbb{P}^\star(G_\alpha - G_\gamma \in dx, D_\gamma - D_\alpha \in dy \mid L_\alpha = l,\ G_\alpha = g,\ D_\alpha = d)/dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_1^\infty ds\, dt\, r_\beta(s,t) \frac{p_{ls}^{(\alpha)}(g-x) p_{l(1-s)}^{(\alpha)}(x)}{p_l^{(\alpha)}(g)} p_{l(t-1)}^{(\alpha)}(y), \qquad 0 < x < g, y > 0.$$

It only remains to integrate w.r.t. the conditional law of L_α. Recall from Theorem 4.1 in [13] that

$$\mathbb{P}(L_\alpha \in dl,\, G_\alpha \in dg,\, D_\alpha - G_\alpha \in dr) = \Pi_\alpha(dr) p_l^{(\alpha)}(g) dl\, dg, \tag{7}$$

where Π_α stands for the Lévy measure of τ_α, so we conclude since

$$\mathbb{P}(G_\alpha \in dg,\, D_\alpha - G_\alpha \in dr) = \Pi_\alpha(dr) u_\alpha(g) dg,$$

where $u_\alpha(g) = g^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ is the potential density of τ_α at level g. □

Proof of Lemma 4.9. The first assertion stems from the strong Markov property applied at the stopping time L. We next use the compensation formula, writing $\Delta\tau_L = D - G$ for the jump of τ at time L. For any nonnegative measurable functional F and function h,

$$\mathbb{E}(F(\tau(L-) - \tau((L-s)-), s \leq L) h(\Delta\tau_L))$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \sum_{t:\Delta\tau_t > 0} F(\tau(t-) - \tau((t-s)-), s \leq t) h(\Delta\tau(t)) \mathbf{1}_{\tau(t-)<1} \mathbf{1}_{\tau(t)>1} \\ &= \mathbb{E} \int_0^\infty dt\, F(\tau(t-) - \tau((t-s)-), s \leq t) \mathbf{1}_{\tau(t-)<1} \int_0^\infty \Pi(dr) h(r) \mathbf{1}_{r > 1-\tau(t-)}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\mathbb{E}(F(\tau(L-) - \tau((L-s)-), s \leq L), L \in dl,\, G \in dg,\, D - G \in dr)$$

$$\begin{aligned} &= dl\, \Pi(dr)\, \mathbb{P}(\tau_l \in dg) \mathbb{E}(F(g - \tau((l-s)-), s \leq l) \mid \tau_l = g) \\ &= dl\, \Pi(dr)\, \mathbb{P}(\tau_l \in dg) \mathbb{E}(F(\tau_s, s \leq l) \mid \tau_l = g), \end{aligned}$$

where the last equality stems from the duality lemma for Lévy processes, which ensures that the bridge's distribution is invariant under time-reversal. By (7), we get that

$$\mathbb{E}(F(\tau(L-) - \tau((L-s)-), s \leq L) \mid L = l, G = g, D - G = r) = \mathbb{E}(F(\tau(s), s \leq l) \mid \tau_l = g),$$

which ends the proof. □

4.4 The stationary case

4.4.1 The intersection scheme

We treat here the case of intersections of n independent stationary regenerative sets. Since by Proposition 4.2, $(A_k, R_k; 1 \leq k \leq n)$ is Markovian, we focus on the case $n = 2$, and change general notation within this subsection only. Namely, let $\mathcal{R}_0$ and $\mathcal{R}_1$ be two independent stationary regenerative sets and set

$$\mathcal{R}_2 \doteq \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0.$$

Recall from the Preliminaries that $\mathcal{R}_2$ is assumed to be nonempty. The probability measure $\mathbb{P}^\cap$ then refers to the pair $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$. We here can no longer use the random covering intervals' representation, since it does not encompass all cases of regenerative sets.
We need to introduce U the potential (or renewal) measure of the generic subordinator σ, defined by

$$U(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\vec{\sigma}_t \in dx)\, dt, \qquad x \geq 0.$$

We then have the identity

$$\int_0^\infty U(dx)\exp(-qx) = \frac{1}{\phi(q)}, \qquad q \geq 0. \tag{8}$$

We further assume that U_0 is absolutely continuous with density u_0 (this is in particular the case when its drift is $\delta_0 > 0$). Thanks to Lemma 4.1, $\mathcal{R}_2$ is a stationary regenerative set which is the closed range of some two-sided subordinator σ_2 with Lévy measure Π_2. By [3, Corollary 12], the potential measure of $\mathcal{R}_2$ can be taken equal to

$$U_2(dx) = u_0(x)U_1(dx), \qquad x \geq 0.$$

A regenerative set is said to be heavy when it has positive drift. We stress that

$$\mathcal{R}_2 \text{ is heavy} \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 \text{ and } \mathcal{R}_1 \text{ are heavy.}$$

Indeed if $\mathcal{R}_2$ is heavy, then it has positive Lebesgue measure a.s. The same holds for $\mathcal{R}_1 \supseteq \mathcal{R}_2$ and $\mathcal{R}_0 \supseteq \mathcal{R}_2$, hence by Proposition 1.8 in [1], $\mathcal{R}_0$ and $\mathcal{R}_1$ are heavy. For the converse, just recall that a regenerative set is heavy iff it has a potential density with a right limit at 0, which is then equal to the inverse of its drift coefficient. As a consequence, as $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0$ has potential density $u_0 u_1$, it is heavy with drift coefficient $\delta_0\delta_1$. It follows in particular thanks to (1) that the measure Π_2 is characterized by

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qx}\bar{\Pi}_2(x)dx = \frac{\phi_2(q)}{q} - \delta_2 = \left[q\int_0^\infty U_1(dx)u_0(x)\mathrm{e}^{-qx}\right]^{-1} - \delta_0\delta_1.$$

We now describe the distribution of (A_1, R_1, A_2, R_2) under the stationary law $\mathbb{P}^\cap$. The tools used to achieve this task are mainly extracted from [3] (see also [16] for earlier results on intersections of regenerative sets). We already know that (A_1, R_1) follows $M(\phi_1)$ (recall (2)).

Theorem 4.10 *Conditional on $A_1 + R_1 = Z$,*

$$(A_2 - A_1, R_2 - R_1) \textit{ is independent of } (A_1, R_1) \textit{ and follows } \nu_Z,$$

where for any $\Delta \geq 0$, ν_Δ *is the unique solution of the convolution equation* $W * \nu_\Delta = V_\Delta$, *with*

$$V_\Delta(dx\,dy) = \mu_0^{-1} u_0(x+y+\Delta)U_1(dx)U_1(dy),$$

and

$$W(dx\,dy) = u_0(x)u_0(y)U_1(dx)U_1(dy) = U_2(dx)U_2(dy).$$

In particular, (A_1, A_2) *and* (R_1, R_2) *are equally distributed and* $A_2 - A_1$ *is independent of* (A_1, R_1).

We stress that explicit (but rather complicated) formulas for ν_Δ will be provided in the proof of the theorem.

Remark. A straight consequence is that $(A_k + R_k; 1 \leq k \leq n)$ is again Markovian.

Proof of Theorem 4.10. Denote by $m(x)$ the first point in the intersection of the shifted regenerative set

$$m(x) = \inf\{y \in (x + \mathcal{R}_1) \cap \mathcal{R}_0\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Then, since $\mathcal{R}_2$ is a.s. nonempty and nondiscrete, Theorem 7 and Corollary 13 in [3] entail that

$$\mathbb{E}(\exp(-qm(x))) = \kappa_q(x)/\kappa_q(0), \qquad q \geq 0, x \in \mathbb{R},$$

where

$$\kappa_q(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-q(x+y)} u_0(x+y)U_1(dy), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Conditional on $A_1 = a_1, R_1 = z_1 - a_1$, we know that $(R_1(t + z_1 - a_1), t \geq 0)$ and $(R_1(a_1 - t), t \geq 0)$ are independent and distributed as $(R_1(t), t \geq 0)$ and $(A_1(t), t \geq 0)$ starting from 0, respectively. Then notice that the law of (A_0, R_0) is $M(\phi_0)$, and therefore

$$\mathbb{E}^\cap\left(\exp\left[-\lambda(A_2 - A_1) - \mu(R_2 - R_1)\right] \mid A_1 = a_1, R_1 = z_1 - a_1\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_{a_0}^\infty \mathbb{P}(A_0 \in da_0, R_0 \in dz_0 - a_0)\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda(m(a_1 - a_0) - (a_1 - a_0)))\right] \\
&\times \mathbb{E}\left[\exp(-\mu(m(z_1 - a_1 - z_0 + a_0) - (z_1 - a_1 - z_0 + a_0)))\right] \\
&= \delta_0 \mu_0^{-1} \frac{\kappa_\lambda(a_1)}{\kappa_\lambda(0)} \exp(\lambda a_1) \frac{\kappa_\mu(z_1 - a_1)}{\kappa_\mu(0)} \exp(\mu(z_1 - a_1)) + \mu_0^{-1} \int_0^\infty da_0 \frac{\kappa_\lambda(a_1 - a_0)}{\kappa_\lambda(0)} \\
&\times \exp -\lambda(a_0 - a_1) \int_{a_0}^\infty \Pi_0(dz_0) \frac{\kappa_\mu(z_1 - a_1 - z_0 + a_0)}{\kappa_\mu(0)} \exp -\mu(z_0 - a_0 - z_1 + a_1) \\
&= (\mu_0 \kappa_\lambda(0)\kappa_\mu(0))^{-1} \int_0^\infty U_1(dx)\mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^\infty U_1(dy)\mathrm{e}^{-\mu y} f(x + a_1, y + z_1 - a_1),
\end{aligned}$$

where for any positive s, t,

$$f(s,t) = \delta_0 u_0(s)u_0(t) + \int_0^\infty da_0 \int_{a_0}^\infty \Pi_0(dz_0)u_0(s - a_0)u_0(t - z_0 + a_0).$$

We next compute f by Laplace inversion. For any positive $q_1 \neq q_2$,

$$\int_0^\infty ds\, \mathrm{e}^{-q_1 s} \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-q_2 t} f(s,t) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\phi_0(q_1)\phi_0(q_2))^{-1} \left(\delta_0 + \int_0^\infty \Pi_0(dz_0) \int_0^{z_0} da_0\, \mathrm{e}^{-q_1 a_0} \mathrm{e}^{-q_2(z_0 - a_0)} \right) \\
&= (\phi_0(q_1)\phi_0(q_2))^{-1} \left(\delta_0 + \int_0^\infty \Pi_0(dz_0) \frac{\mathrm{e}^{-q_2 z_0} - \mathrm{e}^{-q_1 z_0}}{q_1 - q_2} \right) \\
&= \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\frac{1}{\phi_0(q_2)} - \frac{1}{\phi_0(q_1)} \right).
\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ds\, \mathrm{e}^{-q_1 s} \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-q_2 t} u_0(s+t) &= \int_0^\infty dz\, u_0(z) \frac{\mathrm{e}^{-q_2 z} - \mathrm{e}^{-q_1 z}}{q_1 - q_2} \\
&= \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\frac{1}{\phi_0(q_2)} - \frac{1}{\phi_0(q_1)} \right),
\end{aligned}$$

hence for any nonnegative s and t, $f(s,t) = u_0(s+t)$, and the preceding conditional expectation equals

$$\mu_0^{-1} \int_0^\infty U_1(dx) \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^\infty U_1(dy) \mathrm{e}^{-\mu y} \frac{u_0(x+y+z_1)}{\kappa_\lambda(0)\kappa_\mu(0)}.$$

But for any positive q,

$$\kappa_q(0) = \int_0^\infty U_1(dy) u_0(y) \mathrm{e}^{-qy} = \int_0^\infty U_2(dy) \mathrm{e}^{-qy} = \frac{1}{\phi_2(q)},$$

hence

$$\mathbb{E}^\cap \left(\exp\left[-\lambda(A_2 - A_1) - \mu(R_2 - R_1)\right] \mid A_1 = a_1, R_1 = z_1 - a_1 \right) =$$

$$= \phi_2(\lambda)\phi_2(\mu) \int_0^\infty \int_0^\infty V_{z_1}(dxdy) \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\mu y}.$$

The result follows thanks to (8). Using (1), we get the following expressions by convolution products.
If $\delta_2 = 0$, then for $x, y \geq 0$,

$$\nu_\Delta([0,x] \times [0,y]) = \mu_0^{-1} \int_{[0,x]} U_1(ds) \bar{\Pi}_2(x-s) \int_{[0,y]} U_1(dt) \bar{\Pi}_2(y-t) u_0(s+t+\Delta).$$

When $\delta_2 > 0$, then $\delta_1 > 0$ and U_1 is absolutely continuous, which provides

$$\begin{aligned}
\nu_\Delta([0,x]\times[0,y]) &= \mu_0^{-1}\int_{[0,x]} ds\, u_1(s)\bar{\Pi}_2(x-s)\int_{[0,y]} dt\, u_1(t)\bar{\Pi}_2(y-t)u_0(s+t+\Delta)\\
&+ \mu_0^{-1}\delta_2 u_1(x)\int_{[0,y]} dt\, u_1(t)\bar{\Pi}_2(y-t)u_0(x+t+\Delta)\\
&+ \mu_0^{-1}\delta_2 u_1(y)\int_{[0,x]} ds\, u_1(s)\bar{\Pi}_2(x-s)u_0(s+y+\Delta)\\
&+ \mu_0^{-1}\delta_2^2 u_1(x)u_1(y)u_0(x+y+\Delta).
\end{aligned}$$

It only remains to prove the independence between $A_2 - A_1$ and (A_1, R_1). The conditional expectation is still equal to

$$\begin{aligned}
&= (\mu_0\kappa_\lambda(0))^{-1}\int_0^\infty U_1(dx)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(\kappa_\mu(0))^{-1}\int_0^\infty U_1(dy)u_0(x+y+z_1)\mathrm{e}^{-\mu y}\\
&= \mu_0^{-1}\phi_2(\lambda)\int_0^\infty U_1(dx)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{E}(\exp -\mu(m(x+z_1)-x-z_1)).
\end{aligned}$$

By dominated convergence, letting $\mu \to 0+$ yields

$$\mathbb{E}^\cap\left(\exp\left[-\lambda(A_2-A_1)\right] \mid A_1 = a_1, R_1 = z_1 - a_1\right) = \frac{\phi_2(\lambda)}{\mu_0\phi_1(\lambda)},$$

and the proof is complete (moreover we recover the result of Theorem 1 in [2] for the particular case of intersection of independent regenerative sets). $\square$

4.4.2 The subordination scheme

We study the stationary law $\mathbb{P}^\star$ defined in the Preliminaries. The next result gives the transition kernels of the Markov chain $((A_k, R_k), 1 \le k \le n)$. We recall that for $n = 2$, τ_1 and τ_2 are two independent two-sided subordinators and $\mathbb{P}^\star$ stands for the law of $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, where $\mathcal{R}_1$ is the closed range of $\sigma_1 = \tau_1$, and $\mathcal{R}_2$ the closed range of $\sigma_2 = \tau_1 \circ \tau_2$.

Theorem 4.11 *Under $\mathbb{P}^\star$, $(A_k, R_k; 1 \le k \le n)$ is an inhomogeneous Markov chain with independent increments. The distribution of the increment is given by*

$$(A_2 - A_1, R_2 - R_1) \overset{(d)}{=} (\sigma_1^-(\alpha), \sigma_1^+(\rho)),$$

where σ_1^- and σ_1^+ are two independent subordinators both distributed as $\vec{\sigma}_1$, and (α, ρ) is an independent pair of variables following $M(\tau_2)$ (recall (2)).

Proof of Theorem 4.11. We show the result by induction on the number n of subordinators. Recall the general notation given in the Preliminaries. Let $n \ge 2$. By definition of the probability measure $\mathbb{P}^\star$, if $\mathcal{S}_k$ stands for the closed range of $\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$, $k = 2, \ldots, n$, then $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{n-1}, \mathcal{R}_n$, are the respective ranges of $\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$, by $\tau_1 = \sigma_1$. Denote by (a_k, r_k) the age and residual lifetime at 0 associated to $\mathcal{S}_k$, $k = 2, \ldots, n$. In particular, $(A_1, R_1) = (\tau_1(0-), \tau_1(0))$, and for $k = 2, \ldots, n$, with the notation bound to the definition of two-sided subordinator,

$$\begin{aligned}(A_k, R_k) &= (-\tau_1(-a_k-), \tau_1(r_k)) \\ &= (\tau_1^-(a_k) + A_1, \tau_1^+(r_k) + R_1),\end{aligned}$$

and therefore

$$(A_{k+1} - A_k, R_{k+1} - R_k) = (\tau_1^-(a_{k+1}) - \tau_1^-(a_k), \tau_1^+(r_{k+1}) - \tau_1^+(r_k)).$$

Since then,

$$(A_1, R_1; A_2 - A_1, R_2 - R_1; \ldots; A_n - A_{n-1}, R_n - R_{n-1}) =$$

$$= (\tau_1(0-), \tau_1(0); \tau_1^-(a_2), \tau_1^+(r_2); \ldots; \tau_1^-(a_n) - \tau_1^-(a_{n-1}), \tau_1^+(r_n) - \tau_1^+(r_{n-1})).$$

Applying the induction hypothesis to $(a_2, r_2; \ldots; a_n, r_n)$, we get the desired independence. Moreover, focusing on the pair $(A_2 - A_1, R_2 - R_1)$, we have

$$(A_2 - A_1, R_2 - R_1) \overset{(d)}{=} (\sigma_1^-(a_2), \sigma_1^+(r_2)),$$

where (a_2, r_2) follows $M(\tau_2)$. □

4.5 Proof of Corollary 4.4

Recall the pair (m, M) in Theorem 4.3 and denote by $\zeta(g, d; \cdot)$ its conditional law on $(G_\alpha, D_\alpha) = (g, d)$. According to this theorem, for any Borel function f on $(0, 1) \times (1, \infty)$,

$$\mathbb{E}(f(G_\gamma, D_\gamma) \mid G_\alpha = g, D_\alpha = d) = B(\gamma, 1-\gamma)^{-2} \int_0^g \int_d^\infty \zeta(g, d; du\, dv)$$

$$\times \int_0^1 ds\, s^{-\gamma}(1-s)^{\gamma-1} \int_1^\infty dt\, t^{-1}(t-1)^{\gamma-1} f((\frac{1}{g} + (\frac{1}{u} - \frac{1}{g})\frac{1}{s})^{-1},\ d + (v-d)t).$$

Changing variables by $(x, y) = ((\frac{1}{g} + (\frac{1}{u} - \frac{1}{g})\frac{1}{s})^{-1}, d + (v-d)t)$, the last quantity remains equal to

$$B(\gamma, 1-\gamma)^{-2} \int_0^g \int_d^\infty \zeta(g, d; du\, dv) \int_0^u \frac{dx}{g-x} g^\gamma \left(\frac{g-u}{u-x}\right)^{1-\gamma} x^{-\gamma} \int_v^\infty \frac{dy}{y-d} \left(\frac{v-d}{y-v}\right)^{1-\gamma} f(x, y),$$

and referring to Theorem 4.3 for the expression of ζ, it is again equal to (we wrote $(s,t)=(g-u,v-d)$)

$$B(\gamma,1-\gamma)^{-2}\int_0^g \frac{dx}{g-x}g^\alpha x^{-\gamma}\int_d^\infty \frac{dy}{y-d}f(x,y)$$

$$\times\int_0^{g-x}ds\int_0^{y-d}dt\left[-\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left\{\left(\frac{st}{s+t+d-g}\right)^{\gamma-\alpha}\right\}\right](st)^{1-\gamma}(g-x-s)^{\gamma-1}(y-d-t)^{\gamma-1}$$

$$=B(\gamma,1-\gamma)^{-2}\int_0^g \frac{dx}{g-x}g^\alpha x^{-\gamma}\int_d^\infty \frac{dy}{y-d}f(x,y)[(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(I)+(\gamma-\alpha)^2(d-g)(II)],$$

and the differentiation furnishes the following two expressions, where we set $X=g-x$ and $Y=d-y$,

$$\begin{aligned}(I) &= \int_0^X ds\int_0^Y dt\,\frac{(st)^{1-\alpha}}{(s+t+d-g)^{\gamma-\alpha+2}}(X-s)^{\gamma-1}(Y-t)^{\gamma-1}\\ (II) &= \int_0^X ds\int_0^Y dt\,\frac{(st)^{-\alpha}}{(s+t+d-g)^{\gamma-\alpha+1}}(X-s)^{\gamma-1}(Y-t)^{\gamma-1}.\end{aligned}$$

Changing variables by $(u,v)=(X^{-1}s,Y^{-1}t)$, we obtain

$$(I)=\frac{X^{\gamma-\alpha+1}}{Y}\int_0^1 du\,u^{1-\alpha}(1-u)^{\gamma-1}\int_0^1 dv\,\frac{v^{1-\alpha}(1-v)^{\gamma-1}}{(v+Y^{-1}(d-g+uX))^{\gamma-\alpha+2}}.$$

We apply formula 3.197(4) from [15], and then formulas 3.211 and 9.182(1), which entail

$$\begin{aligned}(I) &= \frac{X^{\gamma-\alpha+1}}{Y}B(2-\alpha,\gamma)\int_0^1 du\,u^{1-\alpha}(1-u)^{\gamma-1}\left(\frac{d-g+uX}{Y}\right)^{-\gamma}\left(1+\frac{d-g+uX}{Y}\right)^{\alpha-2}\\ &= B(2-\alpha,\gamma)^2(d-g)^{-\gamma}(X+Y+d-g)^{\alpha-2}(XY)^{\gamma-\alpha+1}\\ &\times\ F(2-\alpha,\gamma,\gamma-\alpha+2,\frac{-XY}{(d-g)(X+Y+d-g)}).\end{aligned}$$

By similar calculations,

$$(II)=B(1-\alpha,\gamma)^2(d-g)^{-\gamma}(X+Y+d-g)^{\alpha-1}(XY)^{\gamma-\alpha}F(1-\alpha,\gamma,\gamma-\alpha+1,\frac{-XY}{(d-g)(X+Y+d-g)}).$$

It is then easy to get

$$\mathbb{E}(f(G_1^{(\gamma)},D_1^{(\gamma)})\mid G_1^{(\alpha)}=g,D_1^{(\alpha)}=d)=B(1-\alpha,\gamma-\alpha)^{-2}(d-g)^{1-\gamma}g^\alpha$$

$$\times\int_0^g dx\,x^{-\gamma}\int_d^\infty dy\,f(x,y)\frac{((g-x)(y-d))^{\gamma-\alpha-1}}{(y-x)^{1-\alpha}}H\left(\frac{(g-x)(y-d)}{(d-g)(y-x)}\right),$$

where for any real number z,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}\left[z(1-\alpha)\int_0^1 dt\, t^{\gamma-1}(1-t)^{1-\alpha}(1+tz)^{\alpha-2}\right. \\ &+ \left.(\gamma-\alpha)\int_0^1 dt\, t^{\gamma-1}(1-t)^{-\alpha}(1+tz)^{\alpha-1}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}\left[-\int_0^1 dt\, t^{\gamma-1}(1-t)^{1-\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\{(1-t)^{\gamma-\alpha}(1+tz)^{\alpha-1}\}\right], \end{aligned}$$

hence $H(0)=1$, and

$$H'(z) = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}(1-\alpha)\int_0^1 dt\, t^{\gamma-1}(1-t)^{1-\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\{t(1-t)^{\gamma-\alpha}(1+tz)^{\alpha-2}\}.$$

An integration by parts now yields

$$\begin{aligned} H'(z) &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}(1-\alpha)(1-\gamma)\int_0^1 dt\, t^{\gamma-1}(1-t)^{-\alpha}(1+tz)^{\alpha-2} \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma-\alpha}F(2-\alpha,\gamma,\gamma-\alpha+1,-z), \end{aligned}$$

which is the expected expression. $\square$

Bibliographie

[1] Bertoin J. (1999)
Subordinators : examples and applications. Cours de l'École d'été de Probabilités de St-Flour. Springer, Berlin.

[2] Bertoin J. (1999)
Renewal theory for embedded regenerative sets. Ann. Probab. **27** 1523-1535.

[3] Bertoin J. (1999)
Intersection of independent regenerative sets. Probab. Theory Relat. Fields **114** 97-121.

[4] Bertoin J., Le Gall J.F. (2000)
The Bolthausen-Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes. Probab. Theory Relat. Fields **117** 249-266.

[5] Bertoin J., Pitman J. (2000)
Two coalescents derived from the ranges of stable subordinators. Electronic J. Probab. **5**.

[6] Bingham N., Goldie C., Teugels J.L. (1987)
Regular variation. Cambridge Univ. Press.

[7] Bolthausen E., Sznitman A.S. (1998)
On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method. Comm. Math. Physics **197** 247-276.

[8] Chateau O. (1990)
Quelques remarques sur la subordination au sens de Bochner. Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[9] Evans S.N., Pitman J. (1998)
Construction of Markovian coalescents. Ann. Inst. Henri Poincaré **34** 339-383.

[10] Feller W.E. (1971)
An Introduction to Probability Theory and Its Applications **2**, 2nd ed. Wiley, New York.

[11] Fitzsimmons P.J., Taksar M.I. (1988)
Stationary regenerative sets and subordinators. Ann. Probab. **16** 1299-1305.

[12] Fitzsimmons P.J., Fristedt B.E., Shepp L.A. (1985)
The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **70** 175-189.

[13] Fristedt B.E. (1974)
Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. In : Advances in Probability **3**(eds. P. Ney and S. Port) pp.241-396. Dekker, New York.

[14] Fristedt B.E. (1996)
Intersections and limits of regenerative sets. In : Random Discrete Structures (eds. D. Aldous and R. Pemantle) pp.121-151. Springer, Berlin.

[15] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. (1980)
Table of integrals, series and products. Academic Press, New York.

[16] Hawkes J. (1977)
Intersection of Markov random sets. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **37** 243-251.

[17] Kingman J.F.C. (1982)
The coalescent. Stoch. Proc. Appl. **13** 235-248.

[18] Matheron G. (1975)
Random sets and integral geometry. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney.

[19] Pitman J. (1997)
Partition structures derived from Brownian motion and stable subordinators. Bernoulli **3** 79-96.

[20] Pitman J. (1999)
Coalescents with multiple collisions. Ann. Probab. **27** 1870-1902.

[21] Pitman J., Yor M. (1992)
Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator. Proc. London Math. Soc. **65** 326-356.

[22] Ruelle D. (1987)
A mathematical reformulation of Derrida's REM and GREM. Comm. Math. Physics **108** 225-239.

[23] Taksar M.I. (1998)
Stationary Markov sets. In : Séminaire de Probabilité XXI (eds. J. Azéma and M.Yor) pp.303-340. Springer-Verlag, Berlin.

[24] Watanabe S. (1975)
On time-inversion of one-dimensional diffusions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31** 115-124.